

Bachelorarbeit Nr. 161

Einfluss periodischer und aperiodischer Fahrpläne auf die Wartezeit von Fahrgästen

Impact of periodic and aperiodic timetables on passenger waiting time

Bearbeiter: Niklas Schmidt

Studiengang: B.Sc. Simulation Technology

Betreuerin: M.Sc. Magdalena Schilling

Prüfer: Prof. Dr.–Ing. Markus Friedrich

15.07.2022



vorgelegt an der

Universität Stuttgart

Institut für Straßen- und Verkehrswesen

Lehrstuhl für Verkehrsplanung und Verkehrsleittechnik

Zusammenfassung

Die Wartezeit ist eine wesentliche Kenngröße für Fahrgäste zur Bewertung eines Angebots im öffentlichen Verkehr (ÖV). Üblicherweise werden ÖV-Angebote mit einem festen Takt geplant. Dies wird von vielen Fahrgästen als Qualitätsmerkmal empfunden, da der Fahrplan leicht zu merken ist. Die Alternative zu solchen periodischen Fahrplänen sind aperiodische Fahrpläne, die schwer merkbar sind, sich aber besser an eine ungleichmäßig über den Tag verteilte Nachfrage anpassen lassen. In dieser Arbeit wird der Einfluss von periodischen und aperiodischen Fahrplänen auf die Wartezeit von Fahrgästen untersucht. Für das Modell einer einzelnen ÖV-Linie mit genau einer Haltestelle werden verschiedene Nachfrageszenarien generiert. Hierbei werden unterschiedliche Nachfragetypen und Interessengruppen berücksichtigt. Ein Optimierungsproblem wird definiert, um zu solch einer gegebenen Nachfragesituation den Fahrplan der jeweiligen Kategorie mit der geringsten resultierenden Gesamtwartezeit zu finden. Dafür wird eine gemischt-ganzzahlige lineare Formulierung gewählt, sodass das Problem mithilfe einer geeigneten Optimierungssoftware gelöst werden kann. Die Analyse der so gefundenen optimalen Fahrpläne zeigt, dass der Einsatz von aperiodischen Fahrplänen besonders bei sehr ungleich verteilter, aber bekannter Nachfrage zu deutlich geringeren Gesamtwartezeiten führen.

Abstract

The waiting time is a key parameter for passengers to evaluate a public transport service. Usually, public transport services are scheduled periodically. Many passengers perceive this as a quality feature since the timetable is easy to remember. The alternative to periodic timetables is aperiodic timetables, which are difficult to remember but can be better adapted to an unevenly distributed demand throughout the day. In this work, the impact of periodic and aperiodic timetables on the waiting time of passengers is examined. Different demand scenarios are generated for the model of a single public transport line with exactly one stop. Thereby, different demand types and interest groups are taken into account. An optimization problem is defined to find the timetable of the respective category with the lowest resulting total waiting time for a given demand. A mixed-integer linear formulation is chosen so that the problem can be solved using suitable optimization software. The analysis of the optimal timetables found in this way shows that aperiodic timetables can lead to significantly lower total waiting times, especially in the case of very unevenly distributed demand.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig verfasst habe und keine anderen Hilfestellungen oder Quellen als die angegebenen in Anspruch genommen habe.

Insbesondere habe ich keinen bezahlten Dienst mit der Anfertigung der gesamten Arbeit oder Teilen der Arbeit beauftragt.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Ziel der Arbeit	1
1.2	Aufbau der Arbeit	1
2	Grundlagen (Propaedeuticum)	3
2.1	Angebotsplanung im öffentlichen Verkehr	3
2.2	Linien, Umläufe und Fahrpläne	3
2.2.1	Periodische Fahrpläne	5
2.2.2	Aperiodische Fahrpläne	5
2.3	Ziele, Zielkriterien und Kenngrößen	6
2.3.1	Kenngrößen für Betreiber	6
2.3.2	Kenngrößen für Fahrgäste	7
2.4	Wartezeiten und Fahrgasttypen	8
2.5	Verkehrsnachfrage	10
2.6	Gemischt ganzzahlige lineare Optimierung	11
2.6.1	Definitionen	11
2.6.2	Beispiel	12
2.6.3	Lösungsverfahren	14
2.7	Veröffentlichungen zu ähnlichen Fragestellungen	18
3	Modellierung	21
3.1	Problemformulierung als mathematisches Modell	21
3.1.1	Rahmenbedingungen des Verkehrsangebots	21
3.1.2	Nachfragemodell	23
3.1.3	Reduktion des Modells auf eine Haltestelle	27

3.1.4	Fahrpläne	32
3.2	Algorithmen zur Berechnung von Wartezeiten	35
3.3	Algorithmus für optimale Lösungen	40
3.3.1	Zusätzliche Nebenbedingungen	41
4	Analyse	45
4.1	Getestete Nachfragesituationen	45
4.2	Ergebnisse	46
4.2.1	Wartezeiten ohne Nebenbedingungen für die Kapazität . . .	46
4.2.2	Wartezeiten mit Nebenbedingungen für die Kapazität . . .	49
5	Zusammenfassung und Ausblick	51
	Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole	54
	Abbildungsverzeichnis	57
	Tabellenverzeichnis	59
	Algorithmenverzeichnis	60
	Literaturverzeichnis	61

1 Einleitung

1.1 Motivation und Ziel der Arbeit

Fahrpläne mit periodisch wiederkehrenden Abfahrts- und Ankunftszeiten sind für Fahrgäste öffentlicher Verkehrsmittel leicht zu merken und weit verbreitet. Schülerinnen und Schüler haben jedoch bestimmte stundenplanabhängige Wunschabfahrts- und Wunschankunftszeiten, die nicht mit jenen einer periodisch verkehrenden Linie einhergehen. Wird ein Busfahrplan an die gewünschten Abfahrtszeiten bestimmter Fahrgastgruppen angepasst, so resultiert ein aperiodischer Fahrplan mit geringerer Merkbarkeit, der aber möglicherweise zu kürzeren Gesamtwarezeiten führt. Das motiviert die folgende Fragestellung, mit der sich diese Arbeit auseinandersetzt:

Bei welchen Nachfrage- und Rahmenbedingungen lohnt sich der Einsatz von aperiodischen Fahrplänen und wann sind periodische Fahrpläne von Vorteil?

Dafür soll der Einfluss von periodischen und aperiodischen Fahrplänen auf die Wartezeiten von Fahrgästen untersucht werden. Das Modell einer Buslinie, die von zwei unterschiedlichen Interessensgruppen genutzt wird, dient der Untersuchung und Bewertung beider Alternativen. Ziel der Arbeit ist es, dafür zwei Methoden zu entwickeln: Eine Methode soll zur Bestimmung der Gesamtwarezeit aller Fahrgäste und der benötigten Fahrzeuge bei einem gegebenen Fahrplan und einer gegebenen Nachfragesituation dienen. Darüber hinaus soll eine Methode präsentiert werden, welche für beide Fahrplanarten wartezeitminimale Fahrpläne berechnet. Diese soll dann auf verschiedene Nachfragesituationen und Rahmenbedingungen angewendet werden, um beide Fahrplankategorien zu vergleichen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel untergliedert. Auf das einführende Kapitel folgen einige Definitionen zu den Themen Angebotsplanung, Verkehrsnachfrage und Fahrpläne in Kapitel 2. Außerdem werden hier die relevanten Kenngrößen für Betreiber und Fahrgäste zur Bewertung von ÖV-Angeboten erläutert. Darunter fällt auch die Wartezeit, deren Komponenten differenziert nach einzel-

nen Fahrgasttypen genauer betrachtet werden. Neben diesen verkehrsplanerischen Grundlagen umfasst das Kapitel auch eine Einführung in die gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung. Abgeschlossen wird das Kapitel von einer Übersicht über Methodik und Ergebnisse einiger Veröffentlichungen zu ähnlichen Fragestellungen.

Kapitel 3 stellt den Hauptteil der Arbeit dar. Hier wird das Modell, das zur Untersuchung der Wartezeiten dienen soll, eingeführt. Algorithmen, die für einen gegebenen Fahrplan die resultierende Wartezeit berechnen, werden angegeben und ein gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem formuliert, welches von der Optimierungssoftware von Gurobi Optimization, LLC (2022) gelöst werden kann.

In Kapitel 4 werden die resultierenden Wartezeiten der gefundenen optimalen Fahrpläne beider Fahrplankategorien verglichen. Dafür wurde die in Kapitel 3 erarbeitete Methode auf verschiedenen Nachfrageszenarien und für eine variierende Anzahl an zur Verfügung stehenden Fahrzeugen getestet.

Die Erkenntnisse werden in Kapitel 5 abschließend zusammengefasst und mögliche Fragestellungen und Zielsetzungen für weiterführende Arbeiten vorgestellt.

2 Grundlagen (Propaedeuticum)

2.1 Angebotsplanung im öffentlichen Verkehr

Die Gestaltung und Optimierung von Fahrplänen ist Teil der Angebotsplanung im öffentlichen Verkehr. Diese hat nach Hartl (2020) die Aufgabe, Werte verschiedener Variablen festzulegen. Dazu gehören:

- Anzahl und Lage der Haltestellen
- Anzahl der Linien und Verlauf der Linienrouten
- Fahrzeiten zwischen Haltestellen und Haltezeiten
- Fahrzeugfolgezeiten bzw. Takt der Linien
- Abfahrtszeiten der Fahrplanfahrten an den Haltestellen
- Fahrzeugtyp bzw. Fahrzeuggröße der Fahrplanfahrten

Zu diesen planerisch beeinflussbaren Variablen kommen Parameter, auf die Planende keinen Einfluss haben. Unter diese Kategorie fallen beispielsweise die Bevölkerungsstruktur, das Fahrwegenetz oder gesetzliche Regelungen zu Arbeitspausen. Je nach Planungsaufgabe können auch Teile der aufgeführten Variablen als vorgegebene Parameter festgelegt werden. Bei der Modellierung in Kapitel 3 werden etwa eine Linienroute mit festen Fahrzeiten zwischen den Haltestellen, die Verkehrsnachfrage und die Menge an verfügbaren Fahrzeugen als gegebene Parameter angesehen und nur die Abfahrtszeiten sowie gegebenenfalls der Takt als Variablen aufgefasst.

2.2 Linien, Umläufe und Fahrpläne

Im Kontext dieser Arbeit besteht eine ÖV-Linie aus einem räumlich definierten Linienweg, der eine feste Menge von Haltestellen $H = \{H_1, \dots, H_n\}$ verbindet. Eine Servicefahrt eines Fahrzeugs startet nach Annahme immer an der sogenannten Starthaltestelle H_1 . Im weiteren Verlauf fährt das Fahrzeug die Haltestellen, wie

durch den Bildfahrplan in Abbildung 2.1 dargestellt, in aufsteigender Reihenfolge an (Hinrichtung), wendet dann an Haltestelle H_n und fährt die Haltestellen auf der Rückfahrt in absteigender Reihenfolge erneut an (Rückrichtung). Diesem Ablauf folgt ein Wendevorgang an H_1 . An den Haltestellen H_1 und H_n kann außerdem eine Standzeit t_1^{STZ} bzw. t_n^{STZ} eingeplant werden. Diese kann einerseits aufgrund von vorgeschriebener Pausenzeiten für das Personal oder auch zur Gewährleistung eines bestimmten Takts (mehr dazu in Kapitel 2.2.1) erforderlich sein. Entscheidend für die Dauer t^U eines Umlaufs U ist neben den Wende- und Standzeiten das Fahrzeitprofil der Linie. Dieses gibt die Fahrzeiten $t_{i,j}^{FZ}$ zwischen benachbarten Haltestellen H_i und H_j an. $t_{i,j}^{FZ}$ enthält nach Definition auch die Haltestellenaufenthaltszeit an Haltestelle H_j zum Ein- und Aussteigen der Fahrgäste. t^U lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$t^U = \sum_{i=1}^{n-1} t_{i,i+1}^{FZ} + t_n^{WZ} + t_n^{STZ}(U) + \sum_{i=1}^{n-1} t_{i+1,i}^{FZ} + t_1^{WZ} + t_1^{STZ}(U) \quad (2.1)$$

Hierbei stehen t_n^{WZ} und t_1^{WZ} für die Dauer des Wendevorgangs an der jeweiligen Haltestelle.

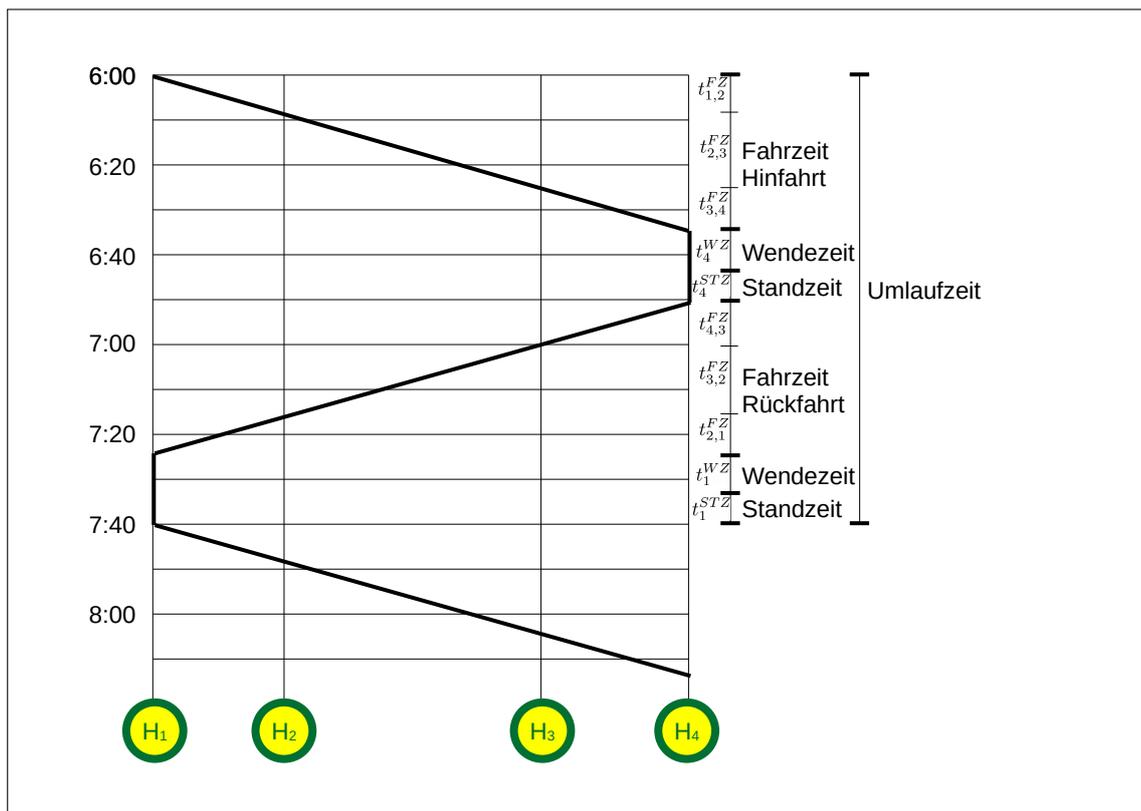


Abbildung 2.1: Umlauf einer ÖV-Linie mit $n = 4$ inklusive Fahrzeitprofil angelehnt an Friedrich (2021a).

Ein Fahrplan setzt sich aus der zeitlichen Abfolge einzelner Servicefahrten von ÖV-Fahrzeugen entlang einer ÖV-Linie zusammen und gibt die zugehörigen

Abfahrtszeiten der eingesetzten Fahrzeuge an den Haltestellen an (Friedrich (2021b)). Bei der Gestaltung von Fahrplänen muss das Fahrzeitprofil beachtet werden.

2.2.1 Periodische Fahrpläne

Beispielsweise aus Gründen der Merkbarkeit werden nach Friedrich (2021a) in der Praxis oft periodische Fahrpläne angestrebt. Diese müssen die Bedingung erfüllen, dass die Fahrzeugfolgezeit, also der zeitliche Abstand aufeinanderfolgender Abfahrtszeiten an einer Haltestelle konstant ist. Diese konstante Fahrzeugfolgezeit wird auch Takt $h \in \mathbb{N}$ des Fahrplans genannt. Abbildung 2.2a zeigt beispielsweise die Abfahrtszeiten an einer Haltestelle bei einem periodischen Fahrplan mit 30-Minuten-Takt. Nach Friedrich (2021b) sollte der in Minuten angegebene Takt h zudem immer einem Vielfachen oder ganzzahligen Bruchteil eine Stunde entsprechen:

$$h \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60, 120, 180, 240\} \quad (2.2)$$

Der Grund für diese Einschränkung ist der, dass für andere Takte kein merkbarer Fahrplan entsteht. Wird beispielsweise wie in Abbildung 2.2b ein Takt von $h = 35$ Minuten gewählt, so sind zwar die Abfahrtszeiten in konstanten zeitlichen Abständen, aber die Abfahrtsminuten unterscheiden sich in jeder Stunde. Studien von Wardman et al. (2004) und Johnson et al. (2006) zeigen, dass die Einführung merkbarer Fahrpläne mit stündlich gleichen Abfahrtsminuten zu einer höheren Nachfrage führen. Das belegt, dass Fahrgäste merkbare Fahrpläne als Qualitätsmerkmal des Verkehrsangebots wahrnehmen. Im Rahmen dieser Arbeit gelten nur die Fahrpläne als periodisch, die eine festen Takt h haben, welcher die Merkbarkeitsbedingung 2.2 erfüllt. Da der gewählte Takt oft nicht zu der minimal möglichen Umlaufzeit der Linie passt, ergeben sich nach Friedrich (2021a) in der Konsequenz unproduktive Standzeiten.

2.2.2 Aperiodische Fahrpläne

Alle Fahrpläne, die keine konstante Fahrzeugfolgezeit haben (siehe z.B. Abbildung 2.2c), werden als aperiodische Fahrpläne bezeichnet. Zusätzlich werden dieser Kategorie im Rahmen dieser Arbeit aber auch alle Fahrpläne mit konstanter Fahrzeugfolgezeit zugeordnet, deren Takt h die Merkbarkeitsbedingung 2.2 nicht erfüllt (wie z.B. in Abbildung 2.2b). Die Merkbarkeit des Fahrplans wird bei dieser Fahrplanart also in der Planung vernachlässigt. Durch das Zulassen von aperiodischen Fahrplänen ergibt sich der Vorteil, dass sich ein solcher Fahrplan im Idealfall besser an die Nachfrage anpassen kann (Hartl (2020)).

4				
5	50			
6	20	50		
7	20	50		
8	20	50		
9	20	50		
10	20	50		
11	20	50		
12	20	50		
13	20	50		
14	20	50		
15	20	50		
16	20	50		
17	20	50		
18	20	50		
19	20	50		
20	20			

4				
5	50			
6	25			
7	00	35		
8	10	45		
9	20	55		
10	30			
11	05	40		
12	15	50		
13	25			
14	00	35		
15	10	45		
16	20	55		
17	30			
18	05	40		
19	15	50		
20	25			

4				
5	50			
6	11	49		
7	03	43	59	
8	21	32		
9	28	50		
10	20			
11	14	43		
12	21	49		
13	16	44		
14	10	33		
15	22	33		
16	16	37	58	
17	07	26	51	
18	27	39		
19	01	56		
20	53			

(a) Fahrplan mit 30-Minuten-Takt und hoher Merkbareit.

(b) Fahrplan mit 35-Minuten-Takt und geringer Merkbareit.

(c) Fahrplan mit unkonstanter Fahrzeugfolgezeit und geringer Merkbareit.

Abbildung 2.2: Einfluss des Taktes auf die Merkbareit.

2.3 Ziele, Zielkriterien und Kenngrößen

Die folgenden Definitionen orientieren sich an den Ausführungen von Friedrich (2021b) und Hartl (2020). Um ein öffentliches Verkehrsangebot bewerten zu können, müssen Ziele, Zielkriterien und Kenngrößen definiert werden. Zielkriterien charakterisieren die Art des Ziels und werden selbst durch ein oder mehrere Kenngrößen beschrieben. Es wird unterschieden zwischen benutzerbezogenen Kenngrößen, welche die Angebotsqualität aus Fahrgastsicht beschreiben und betrieblichen Kenngrößen, welche den Aufwand und die Kosten für den Betreiber messen.

2.3.1 Kenngrößen für Betreiber

Der betriebliche und finanzielle Aufwand für die Realisierung eines ÖV-Angebots hängt direkt mit dem Liniennetz und dem Fahrplan zusammen. Beispiel: Die Anzahl der geplanten Fahrplanfahrten pro Tag beeinflussen die Kosten und die erforderliche Anzahl an Fahrzeugen und Fahrern. In Tabelle 2.1 sind die wichtigsten Zielkriterien für die Betreiber und ihre zugehörigen Kenngrößen aufgeführt.

Tabelle 2.1: Zielkriterien und Kenngrößen für Betreiber nach Hartl (2020).

Zielkriterien für Betreiber	zugehörige Kenngrößen	Einheit
Betriebsleistung	Anzahl Fahrplanfahrten	[-]
	Servicekilometer und -zeit	[km, min]
	Einsatzkilometer und -zeit	[km, min]
	Leerkilometer und -zeit	[km, min]
	Sitzplatzkilometer	[km]
Beförderungsleistung	Linienbeförderungsfälle	[-]
	Personenkilometer und -stunden	[km, h]
Kosten	Betriebskosten	[€]
	Erlöse aus Fahrgeldeinnahmen	[€]
Betrieblicher Aufwand	Anzahl Fahrer	[-]
	Anzahl erforderlicher Fahrzeuge	[-]

2.3.2 Kenngrößen für Fahrgäste

Als Zielkriterien für Fahrgäste listet Hartl (2020) den zeitlichen Aufwand, Direktheit, Verfügbarkeit, Zuverlässigkeit und den Komfort des Verkehrsangebots. Entscheidende Kenngröße für den zeitlichen Aufwand der Fahrgäste ist die Reisezeit t^{RZ} . Nach Friedrich (2021b) setzt sie sich als Summe der in Tabelle 2.2 aufgeführten Komponenten zusammen:

$$t^{RZ} = t^{ZZ} + t^{AZ} + t^{SZ} + t^{FZ} + t^{UWZ} + t^{UGZ} \quad (2.3)$$

Folglich kann eine geringere Reisezeit durch Reduzierung einer der genannten Zeiten erreicht werden. In Kapitel 2.4 folgt eine genauere Betrachtung der Wartezeiten.

Die Direktheit kann über die Kenngrößen Zugangsweite (Länge der Strecke vom Quellort der Orstveränderung bis zur Einstiegshaltestelle) und Umsteigehäufigkeit gemessen werden.

Eine Kenngröße für die Verfügbarkeit ist die Betriebszeit, definiert als die Anzahl der Stunden, in denen eine Fahrplanverbindung angeboten wird. Dazu kommen die Bedienungshäufigkeit, welche direkt von den Fahrzeugfolgezeiten abhängt, und die Regelmäßigkeit. Letztere ist keine quantifizierbare Kenngröße, aber das öffentliche Verkehrsangebot kann durch die in Kapitel 2.2 beschriebenen Fahrplanarten (periodisch oder aperiodisch) kategorisiert werden.

Für das Zielkriterium Zuverlässigkeit steht als Kenngröße der Anteil pünktlicher

Tabelle 2.2: Komponenten der Reisezeit nach Friedrich (2021b).

Symbol	KenngroÙe	Bedeutung
t^{ZZ}	Zugangszeit	Gehzeit Quellort – Einstiegspunkt in das erste Verkehrsmittel
t^{AZ}	Abgangszeit	Gehzeit Ausstiegspunkt aus dem letzten Verkehrsmittel - Zielort
t^{SZ}	Startwartezeit	Wartezeit beim Einstieg in das erste Verkehrsmittel
t^{FZ}	Fahrzeit	Fahrzeit im Verkehrsmittel, im ÖV einschließlich Haltestellenaufenthaltszeiten
t^{UWZ}	Umsteigewartezeit	Wartezeit zwischen Ankunft und Abfahrt an einem Umsteigepunkt
t^{UGZ}	Umsteigegehzeit	Gehzeit für Fußwege zwischen zwei Umsteigepunkten bei Verkehrsmittelwechsel

Verbindungen zur Verfügung. Die Verlustzeit, also die Zeitdifferenz aus Soll- und Ist-Reisezeit berücksichtigt zudem das Ausmaß der Verspätungen.

Eine KenngröÙe für den Komfort ist beispielsweise die Auslastung der eingesetzten Fahrzeuge. Von ihr hängt die Wahrscheinlichkeit ab, einen Sitzplatz zu bekommen.

2.4 Wartezeiten und Fahrgasttypen

In dieser Arbeit soll der Einfluss unterschiedlicher Fahrplanarten auf die Wartezeit der Fahrgäste untersucht werden. Eine wichtige Rolle spielt hierbei insbesondere die Startwartezeit t^{SZ} , welche von Friedrich (2021b) als Wartezeit beim Einstieg in das erste Verkehrsmittel definiert wird. Auf diese kann über die Fahrplange- staltung Einfluss genommen werden, da sie von den angebotenen Abfahrtszei- ten abhängt. Für die genauere Betrachtung der Startwartezeiten ist es wichtig, unterschiedliche Fahrgasttypen differenziert zu betrachten. Anzumerken ist, dass im Folgenden immer von einer pünktlichen Abfahrt ausgegangen wird, im Falle von Verspätungen kann sich die Startwartezeit verlängern. Esfeh et al. (2021) unterscheiden zwischen planenden und nicht-planenden Fahrgästen. Diese Unterteilung ist in Bezug auf die Wartezeit interessant:

Nicht-planende Fahrgäste gehen zu zufälligen Zeiten zu einer Haltestelle und müssen dort im Normalfall warten, bis das nächste Fahrzeug kommt. Sind diese zufällig gewünschten Abfahrten der Fahrgäste zeitlich gleichverteilt, so ergibt sich der Erwartungswert der Startwartezeit bei einem periodischen Fahrplan mit Takt h nach Esfeh et al. (2021) zu:

$$\mathbb{E}(t^{SZ}) = \frac{1}{2}h \quad (2.4)$$

Der Erwartungswert der Startwartezeit entspricht auch bei den aperiodischen Fahrplänen der jeweiligen halben Fahrzeugfolgezeit, jedoch ist diese nicht konstant, sondern kann sich nach jeder Abfahrt ändern.

Planende Fahrgäste informieren sich im Vorfeld der Ortsveränderung über die angebotenen Abfahrtszeiten. Im Idealfall können sie ihre Aktivitäten zeitlich entsprechend anpassen, sodass sie keine Startwartezeit haben: $t^{SZ} = 0$. Anzumerken ist hierbei aber auch, dass eine solche Anpassung für gewisse Fahrgäste nicht möglich ist, auch wenn sie über die Abfahrtszeiten Bescheid wissen. Beispielsweise Schüler, die für ihren Heimweg den Bus nutzen, sind von den Schulendzeiten abhängig und haben somit eine feste Wunschabfahrtszeit.

Laut Esfeh et al. (2021) hängt es auch von den Fahrzeugfolgezeiten ab, ob ein Fahrgast sich als planender oder nicht-planender Fahrgast verhält. Genauer wird diese Abhängigkeit von den Autoren nicht spezifiziert. Es ist jedoch davon auszugehen, dass nicht-planende Fahrgäste verstärkt bei kurzen Fahrzeugfolgezeiten vorkommen.

Nuzzolo et al. (2012) unterteilen die Fahrgäste in jene mit gewünschter Abfahrtszeit $t^{WABZ,i}$ an der Quellhaltestelle H_i und jene mit gewünschter Ankunftszeit $t^{WANZ,j}$ an der Zielhaltestelle H_j :

Fahrgäste mit Wunschankunftszeit fragen hauptsächlich Wege nach, die am Wohnort beginnen und zu einer bestimmten Aktivität führen, etwa in den Bereichen Arbeit und Bildung. Diese Fahrgäste wählen die angebotene Servicefahrt mit der nächst früheren Ankunft am Ziel $\pi^{AN,j} \leq t^{WANZ,j}$. Somit entsteht eine Wartezeit am Ziel (Zielwartezeit t^{ZZ}), welche laut Esfeh et al. (2021) in Studien zur Wartezeit von Fahrgästen häufig vernachlässigt wird:

$$t^{ZZ} = t^{WANZ,j} - \pi^{AN,j} \quad (2.5)$$

Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit kommen hingegen insbesondere bei Rückwegen nach Ende einer Aktivität vor. Sei $\pi^{AB,i}$ die nächste angebotene Ab-

fahrtszeit, sodass $\pi^{AB,i} \geq t^{WABZ,i}$, dann gilt für die Startwartezeit der Fahrgäste:

$$t^{SZ} = \pi^{AB,i} - t^{WABZ,i} \quad (2.6)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass nicht-planende Fahrgäste immer Fahrgäste mit (zufällig verteilten) Wunschabfahrtszeiten sind. Unter den planenden Fahrgästen gibt es die Unterteilung in jene mit Wunschabfahrts- und jene mit Wunschankunftszeit. Abbildung 2.3 veranschaulicht diese Einteilung.

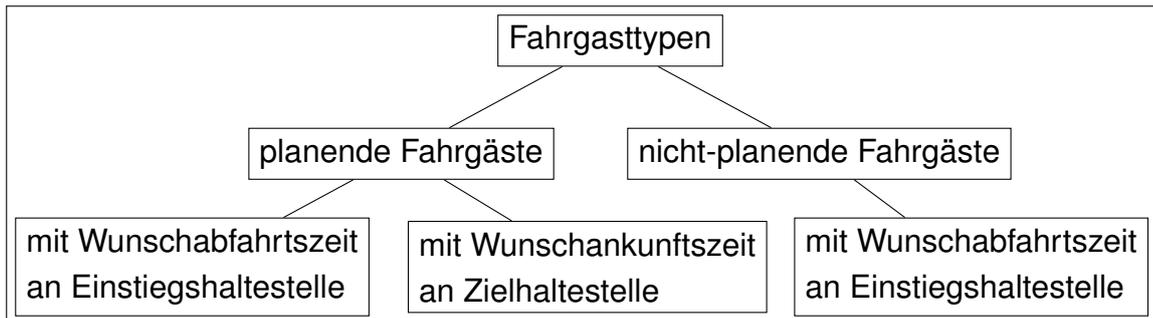


Abbildung 2.3: Unterteilung der unterschiedlichen Fahrgasttypen.

2.5 Verkehrsnachfrage

Nach Friedrich (2021b) beschreibt die Verkehrsnachfrage die Menge der nachgefragten Bewegungen der Verkehrsteilnehmenden oder Güter, bezogen auf einen Zeitintervall. Kirchhoff (2002) unterscheidet bei der Verkehrsnachfrage einmal nach dem Gegenstand (Personen oder Güter) und der Veranlassung (privat oder dienstlich/geschäftlich) der zugehörigen Ortsveränderung. Als dienstlich/geschäftlich werden hierbei nur die Wege angesehen, die *innerhalb* einer beruflichen Tätigkeit durchgeführt werden. Wege zum Arbeitsplatz oder zu Bildungseinrichtungen sind also der privaten Personenverkehrsnachfrage zugeordnet, auf die sich die vorliegende Arbeit konzentriert. Veranlasst wird diese Nachfrage von Aktivitäten, die sich nach Kirchhoff (2002, S. 71) „aus den Daseinsgrundbedürfnissen Wohnen, Arbeiten, Bilden, Versorgen, Erledigen und Freizeit“ ableiten lassen. Der Umfang dieser Aktivitäten wird wiederum durch die Bevölkerungs- und Wirtschaftsstruktur bestimmt. Der Autor betont außerdem, dass Verkehrsnachfrage und Verkehrsangebot in Wechselwirkung zueinander stehen. Durch die Verkehrsnachfrage wird der Umfang des Verkehrsangebots bestimmt, das Verkehrsangebot beeinflusst wiederum die Verkehrsmittelwahl. Zur Analyse der Verkehrsnachfrage eignen sich nach Hartl (2020) Verkehrszählungen, Befragungen der Fahrgäste und Verkehrsnachfragemodelle, welche wiederum die Daten von Zählungen, Befragungen aber auch Erwartungswerte mitein-

beziehen. Nach Friedrich (2021b) unterscheiden Verkehrsnachfragemodelle außerdem zwischen verschiedenen Nachfragegruppen. Hierbei wird die Nachfrage zum einen nach dem Wegezweck (z.B. zur Arbeit, zur Schule, zum Einkaufen etc.) und nach Zugehörigkeit zu bestimmten Personengruppen aufgeteilt. Diese lassen sich durch Merkmale wie beispielsweise Alter, Geschlecht, Erwerbstätigkeit oder Pkw-Besitz charakterisieren. Nachfragematrizen $D \in \mathbb{N}^{n \times n}$ auf Haltestellenebene eignen sich, um die Verkehrsnachfrage für eine ÖV-Linie zu quantifizieren (Hartl (2020)). Ein Matrixeintrag $D_{i,j}$ gibt die Anzahl der nachgefragten Ortsveränderungen mit dem Modus ÖV mit Quellhaltestelle H_i und Zielhaltestelle H_j , bezogen auf einen bestimmten Zeitraum, an. Für die genaue Untersuchung der verschiedenen Wartezeiten sollte dafür optimalerweise die Nachfrage zahlenmäßig einerseits nach Nachfragegruppen, und gegebenenfalls zusätzlich nach den in Kapitel 2.4 beschriebenen, unterschiedlichen Fahrgasttypen unterteilt werden. Dafür kann, wie in Kapitel 3.1.2 ausgeführt, jeweils eine eigene Nachfragematrix definiert werden.

2.6 Gemischt ganzzahlige lineare Optimierung

Die Optimierung von Fahrplänen ist mit Entscheidungsprozessen verbunden. So muss bei der Fahrplangestaltung beispielsweise entschieden werden, zu welcher Minute eine Abfahrtszeit stattfinden soll - und zu welcher nicht. Für eine mathematische Formulierung eines passenden Optimierungsproblems werden Variablen definiert, die ausschließlich bestimmte ganzzahlige Werte annehmen können.

2.6.1 Definitionen

Nowak (2015) (S. 131) definiert eine Optimierung (in dieser Arbeit wird der Begriff Optimierungsproblem gewählt) als „die Aufgabe, eine bestmögliche Lösung für ein Problem zu finden“. Sind bei einem Optimierungsproblem alle oder einige der Freiheitsgrade ganzzahlig, so handelt es sich nach Kallrath (2012) um ein Problem der gemischt-ganzzahligen Optimierung (engl.: *mixed integer program* (MIP)). Ist dieses in der folgenden Form gegeben, so handelt es sich um ein gemischt-ganzzahliges *lineares* Optimierungsproblem (engl.: *mixed integer linear program* (MILP)):

$$\min_{\mathbf{x} \in P} z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{Z}^{n_d} \mid \begin{array}{l} A\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Hierbei gilt $A \in \mathbb{R}^{m \times (n_c + n_d)}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Die Menge P wird auch als zulässiger Bereich, und ihre Elemente als zulässige Punkte des MILP bezeichnet. Ist P leer, so gilt das Optimierungsproblem als nicht zulässig. $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ ist die Zielwertfunktion (auch Zielfunktion) des Optimierungsproblems und ist wie die Nebenbedingungen $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$ linear. Das gilt auch für die Nichtnegativitätsbedingung $\mathbf{x} \geq 0$, welche elementweise zu interpretieren ist. Maximierungsprobleme sind von der Definition 2.7 nicht ausgeschlossen, da sie durch Multiplikation der Zielwertfunktion mit -1 zu Minimierungsproblemen umgewandelt werden. Die Argumente der Zielwertfunktion bestehen aus reellwertigen Variablen $x_1, \dots, x_{n_c} \in \mathbb{R}$ und ganzzahligen Variablen $x_{n_c+1}, \dots, x_{n_d} \in \mathbb{N}$. Andere lineare Ungleichungen als Nebenbedingung werden ebenfalls nicht ausgeschlossen, da sie mithilfe von sogenannten Schlupfvariablen in die geforderte Gleichungsform gebracht werden können:

Aus einer Ungleichung der Form

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq d \text{ mit } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_c + n_d}, d \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

wird durch Definition der Schlupfvariablen $y \in \mathbb{R}_0^+$ die Gleichung:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} + y = d \quad (2.9)$$

Nebenbedingungen der Form $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq d$ können außerdem durch Multiplikation mit -1 in eine Ungleichung der Form 2.8 umgeformt werden.

Es ist somit also auch möglich, Ungleichungen der Form $x_j \leq 1$ für eine ganzzahlige Variable x_j in das MILP einzufügen, sodass diese Variable nur noch die Werte 0 und 1 annehmen kann. Eine auf diese Weise eingeschränkte Variable wird binäre Variable genannt. Für die Formulierung von bestimmten Entscheidungsproblemen als MILP (wie beispielweise in der Fahrplanoptimierung) können diese besonders nützlich sein.

Als LP-Relaxation eines MILP wird nach Kallrath (2012) das Problem selbst, allerdings *ohne* die Ganzzahligkeitsbedingungen $(x_{n_c+1}, \dots, x_{n_d}) \in \mathbb{N}_0^{n_d}$, bezeichnet. Laut dem Autor kann das Simplexverfahren die Lösung eines solchen LP-Problems in endlicher Zeit und meist sogar recht schnell finden. Auf das Simplexverfahren wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen.

2.6.2 Beispiel

Sei $n_c = 0$ und $n_d = 2$. Betrachtet wird das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem:

$$\min_{(x_1, x_2)^T \in P} z = -x_1 - 2 \cdot x_2 \quad P = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right) \in \mathbb{N}_0^2 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -\frac{4}{5}x_1 + x_2 \leq \frac{13}{5} \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Durch Definition der Schlupfvariablen $y_A, y_B \in \mathbb{R}_0^+$ kann das folgende äquivalente Optimierungsproblem definiert werden:

$$\min_{(x_1, x_2, y_A, y_B)^T \in P} z = -x_1 - 2 \cdot x_2 \quad P = \left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ y_A \\ y_B \end{array} \right) \in \mathbb{N}_0^2 \times \mathbb{R}_0^{+2} \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + y_A = 5 \\ -\frac{4}{5}x_1 + x_2 + y_B = \frac{13}{5} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Für die LP-Relaxation dieses MILP muss $\mathbb{N}_0^2 \times \mathbb{R}_0^{+2}$ bei der Definition von P in 2.11 lediglich durch \mathbb{R}_0^{+4} ersetzt werden.

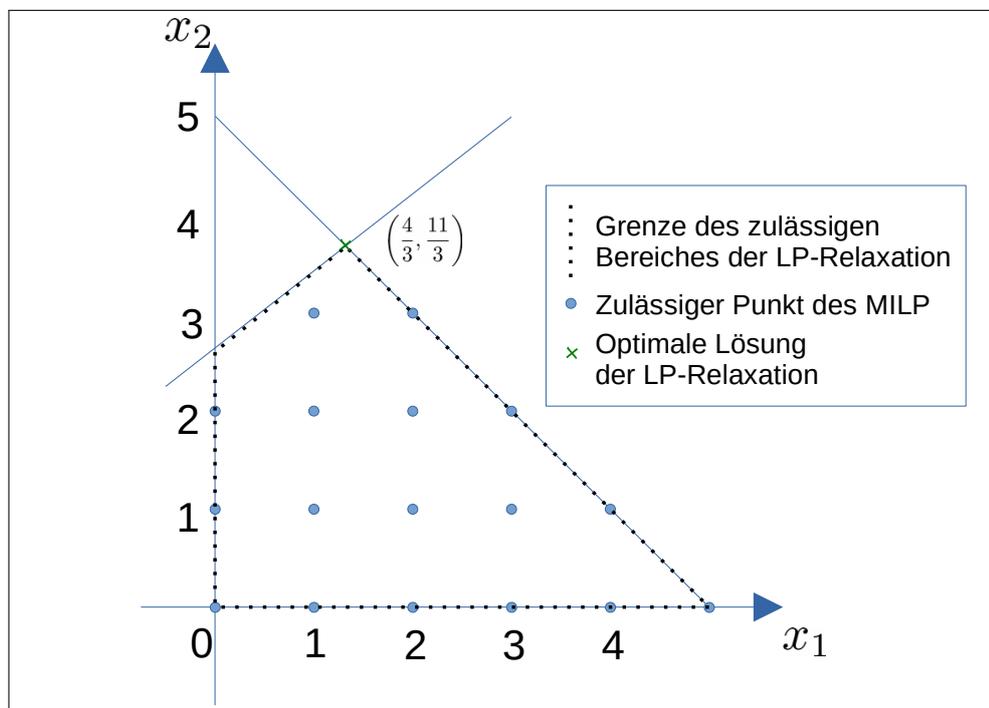


Abbildung 2.4: Zulässiger Bereich des Beispiel-MILP und seiner LP-Relaxation.

Abbildung 2.4 zeigt den zulässigen Bereich der LP-Relaxation des Optimierungsproblems 2.10, sowie die zulässigen Punkte des MILP. Durch das Simplex-Verfahren kann die optimale Lösung der LP-Relaxation mit den Koordinaten $\mathbf{x}_{LP}^* = (\frac{4}{3}, \frac{11}{3})$ mit Zielfunktionswert $z_{LP}^* = -\frac{26}{3} = -8\frac{2}{3}$ gefunden werden. Aufgrund der begrenzten Anzahl der zulässigen Punkte lässt sich die optimale Lösung des MILP hier in kurzer Zeit durch Enumeration aller dieser Punkte finden. Diese hat die Koordinaten $\mathbf{x}_{MILP}^* = (1, 3)$ und Zielfunktionswert $z_{MILP}^* = -8$. Die Zahl der zulässigen Punkte eines MILP steigt allerdings nach Kallrath (2012) mit der Zahl der Variablen exponentiell an und für höherdimensionale Probleme ist es nicht mehr in akzeptabler Rechenzeit möglich, die optimale Lösung durch Enumeration

aller zulässigen Punkte zu finden. Daher werden im Folgenden Lösungsverfahren für MILPs vorgestellt, die Anhand des eingeführten Beispiels erläutert werden.

2.6.3 Lösungsverfahren

Branch&Bound Verfahren

Beim von Land und Doig (1960) eingeführten Branch&Bound Verfahren wird die optimale Lösung eines gemischt-ganzzahligen linearen Optimierungsproblems mithilfe von LP-Relaxationen und einem Suchbaum gefunden. $MILP_0$ bezeichne das zu untersuchende gemischt-ganzzahlige Optimierungsproblem. Falls die optimale Lösung der LP-Relaxation $\mathbf{x}_{LP_0}^*$ selbst alle geforderten Ganzzahligkeitsbedingungen des MILP erfüllt, so ist diese Lösung auch ein zulässiger Punkt des MILP und dessen optimale Lösung. In diesem Fall ist das Verfahren bereits nach dem ersten Schritt abgeschlossen. Im Normalfall erfüllt $\mathbf{x}_{LP_0}^*$ allerdings nicht alle geforderten Ganzzahligkeitsbedingungen, der zugehörige Zielfunktionswert kann aber als untere Schranke (engl.: lower bound (LB)) des gesuchten Minimums des MILP angesehen werden:

$$z_{MILP_0}^* \geq z_{LP_0}^* =: LB_0 \quad (2.12)$$

Sei $(\mathbf{x}_{LP_0}^*)_j$ einer der Variablenwerte, der aufgrund der Relaxation nicht-ganzzahlig ist, für den aber im MILP Ganzzahligkeit gefordert ist. Durch Hinzufügen der Ungleichung $x_j \leq \lfloor (\mathbf{x}_{LP_0}^*)_j \rfloor$ an das ursprüngliche MILP entsteht ein Unterproblem mit einer geringeren Anzahl zulässiger Punkte. Wird stattdessen die Ungleichung $x_j \geq \lfloor (\mathbf{x}_{LP_0}^*)_j \rfloor + 1$ hinzugefügt, entsteht ein zweites Unterproblem, dessen zulässiger Bereich disjunkt zu dem des ersten Unterproblems ist. Handelt es sich bei x_j um eine binäre Variable, so wird für die beiden Unterprobleme x_j einmal auf den Wert 1 und einmal auf den Wert 0 fixiert. Diese Unterprobleme bilden nun die erste Verzweigung eines Suchbaums von MILPs. Werden optimale Lösungen für diese beiden Unterprobleme gefunden, so ist die bessere der beiden Lösungen direkt die optimale Lösung des ursprünglichen MILP. Um diese zu finden, wird das beschriebene Verfahren rekursiv auf die Unterprobleme angewendet und so der Suchbaum aus Unterproblemen weiter verzweigt (Branch).

Ist die optimale Lösung $\mathbf{x}_{LP_i}^*$ einer LP-Relaxation eines Unterproblems ganzzahlig, so handelt es sich um eine zulässige Lösung des ursprünglichen MILP. Außerdem ist der Zielfunktionswert $z_{LP_i}^*$ gleichzeitig eine obere Schranke (engl.: upper bound (UB)) für das gesuchte Minimum des ursprünglichen MILP:

$$z_{MILP_0}^* \leq z_{LP_i}^* =: UB_0 \quad (2.13)$$

Folgerichtig müssen Unterprobleme, deren LP-Relaxation eine optimale Lösung mit einem schlechteren Zielwertfunktion haben, nicht weiter untersucht werden. Durch das Ermitteln von oberen und unteren Schranken (Bound) in Bezug auf die Minima der Teilprobleme müssen also nicht alle Knoten des Suchbaums weiter verzweigt werden. Auch andere Verwerfungskriterien, wie die Unzulässigkeit des Problems (also falls die Nebenbedingung im Widerspruch zu einander stehen), können nach Kallrath (2012) betrachtet werden, um zu entscheiden, ob ein Knoten noch weiter expandiert werden muss oder nicht.

Beispiel: Im Folgenden sei $MILP_0$ das Beispiel-MILP aus Kapitel 2.6.2. Die x_1 Variable der optimalen Lösung der LP-Relaxation hat den Wert $\frac{4}{3}$ und ist somit nicht ganzzahlig. Durch Hinzufügen der Ungleichung

$$x_1 \leq \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1 \quad (2.14)$$

an $MILP_0$ entsteht das Unterproblem $MILP_1$. Das zweite Unterproblem $MILP_2$ entsteht durch Hinzufügen der Nebenbedingung

$$x_1 \geq \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor + 1 = 2. \quad (2.15)$$

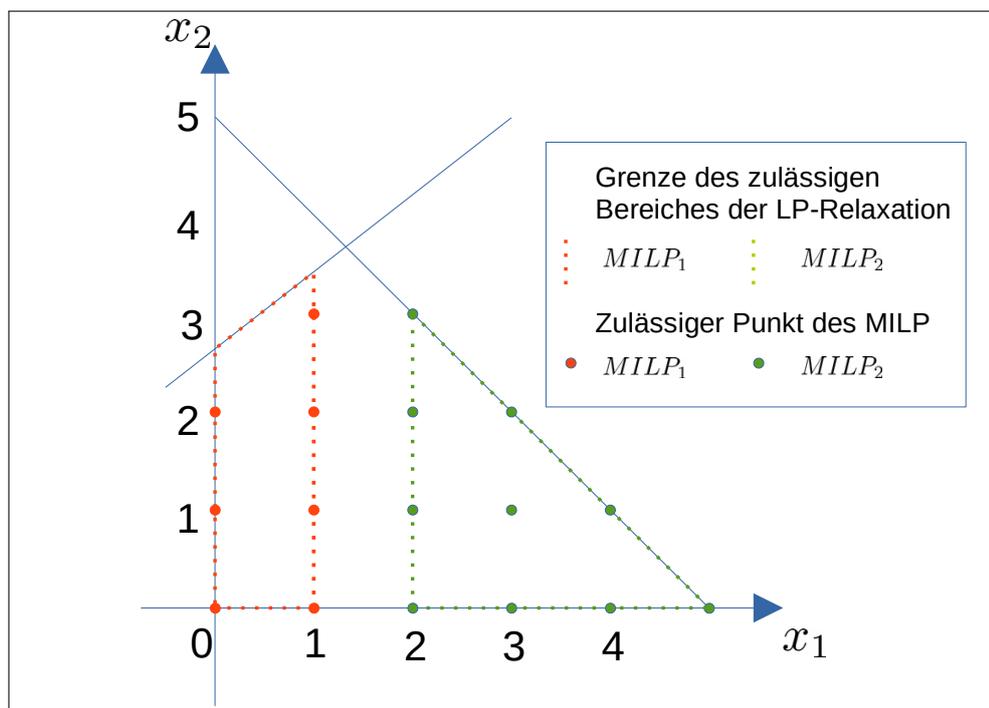


Abbildung 2.5: Zulässiger Bereich der beiden Unterprobleme und ihrer LP-Relaxationen.

In Abbildung 2.5 ist zu erkennen, wie der zulässige Bereich von $MILP_0$ in zwei disjunkte Mengen aufgeteilt wurde. Der in Abbildung 2.6 dargestellte Suchbaum

des Branch&Bound-Verfahrens wird also das erste mal verzweigt. Dann wird das Simplex-Verfahren auf die LP-Relaxation von $MILP_1$ angewandt und es resultiert das Minimum bei $\mathbf{x}_{LP_1}^* = (1, \frac{17}{5})$ mit Zielfunktionswert $z_{LP_1}^* = -\frac{39}{5} = -7,8$. Dieser Wert dient als untere Schranke $LB_1 = -7,8$ für das Minimum des Unterproblems $MILP_1$.

Der gleiche Schritt wird für das zweite Unterproblem durchgeführt und es resultiert $\mathbf{x}_{LP_2}^* = (2, 3)^T$ und $z_{LP_2}^* = -8$. Die optimale Lösung der LP-Relaxation dieses Unterproblems ist also ganzzahlig. Somit entspricht sie zum einen auch der optimalen Lösung von $MILP_2$ und ist zum anderen auch ein zulässiger Punkt von $MILP_0$. Außerdem gilt $LB_1 > z_{MILP_2}^*$, woraus folgt, dass die optimale Lösung von $MILP_1$ auf jeden Fall schlechter ist als jene von $MILP_2$. Somit muss der Suchbaum nicht weiter verzweigt werden und es gilt $z_{MILP_0}^* = 8$.

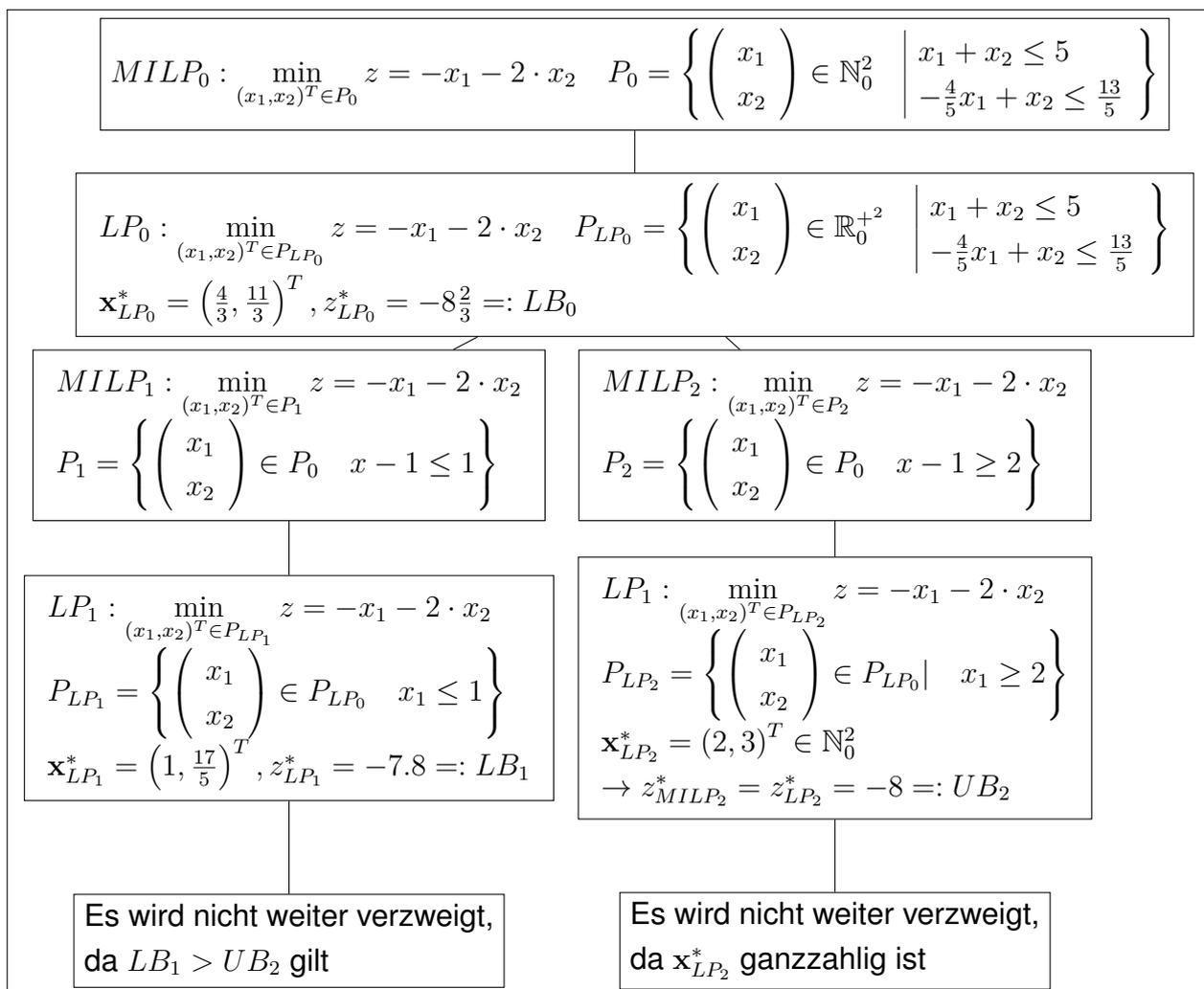


Abbildung 2.6: Suchbaum des Branch&Bound Verfahrens für ein Beispiel-MILP.

Schnittebenenverfahren

Auch das von Gomory (2010) etablierte Schnittebenenverfahren macht von LP-Relaxationen Gebrauch. Die Idee ist hier, eine zusätzliche Nebenbedingung einzuführen, die von allen zulässigen Lösungen des ursprünglichen MILP erfüllt werden, nicht aber von der optimalen Lösung der LP-Relaxation. Diese zugehörigen Ungleichungen heißen Schnittebenen (engl.: cutting planes) und werden dann an das MILP angefügt. Dieser Schritt wird dann so lange wiederholt, bis die Lösung der LP-Relaxation alle geforderten Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt.

Beispiel: Betrachtet wird wieder das Beispiel-MILP aus Kapitel 2.6.2. Die Nebenbedingung $x_2 \leq 3$ wird von jedem zulässigen Punkt des MILP erfüllt, jedoch nicht von der optimalen Lösung $\mathbf{x}_{LP}^* = \left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$. Daher wird diese Ungleichung dem MILP als Schnitt Ebene hinzugefügt, indem der zulässige Bereich modifiziert wird:

$$P' = P \cap \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{N}_0^2 | x_2 \leq 3\} \quad (2.16)$$

Die optimale Lösung der LP-Relaxation des resultierenden MILP ist $\mathbf{x}_{LP'}^* = (3, 2)$ und $z_{LP'}^* = 8$. Sie ist also ganzzahlig und entspricht der optimalen Lösung des MILP. Abbildung 2.7 demonstriert das Schnittebenenprinzip, bei dem die optimale Lösung der LP-Relaxation von den zulässigen Punkten des MILP getrennt wird.

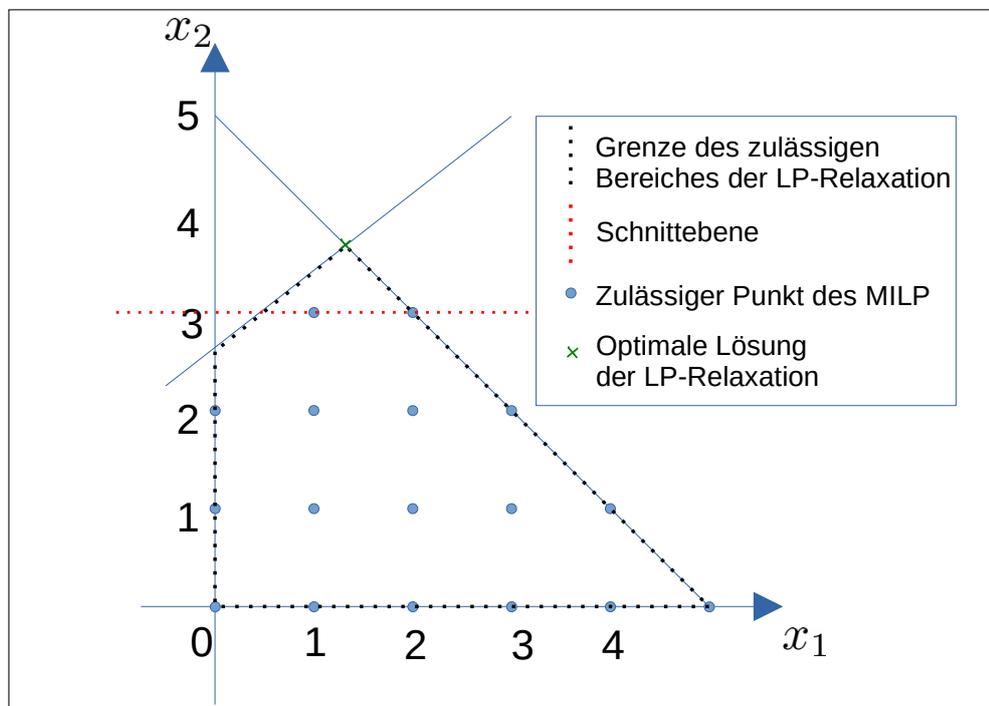


Abbildung 2.7: Eine Schnitt Ebene trennt die optimale Lösung der LP-Relaxation von den zulässigen Punkten des MILP.

Branch&Cut-Verfahren

Das von Padberg und Rinaldi (1987) präsentierte Branch&Cut-Verfahren vereingt die beiden Ansätze der Branch&Bound- und Schnittebenenverfahren. Übergeordnet ist das Branch&Bound Verfahren, jedoch wird der Suchbaum nur dann weiter verzweigt, wenn keine Schnittebenen mehr zum Trennen der optimalen Lösung der LP-Relaxation vom zulässigen Bereich des MILP zur Verfügung stehen. Für einige Optimierungsprobleme gibt es nach Kallrath (2012) eine sehr hohe Zahl von Nebenbedingungen. Alle diese Nebenbedingungen von Beginn an in das MILP aufzunehmen führt somit zu einem sehr komplexen Modell. Daher wird für das Branch&Cut - Verfahren ein Teil dieser Nebenbedingungen gar nicht von Anfang an in das MILP integriert, sondern die gefundene Lösung auf Erfüllung dieser Nebenbedingungen überprüft und gegebenenfalls genau die Nebenbedingungen, die von der Lösung verletzt werden, als Schnittebenen hinzugefügt. Die Menge dieser potenziellen Schnittebenen wird auch cut pool genannt (vgl. Barrena et al. (2014)).

2.7 Veröffentlichungen zu ähnlichen Fragestellungen

Der Vergleich periodischer und aperiodischer Fahrpläne ist bereits in einigen Studien zu finden. Interessanterweise werden in den einzelnen Veröffentlichungen unterschiedliche Kenngrößen für den Vergleich herangezogen. In ihrer Publikation „When Periodic Timetables are Suboptimal“ prüfen Borndörfer und Liebchen (2007), ob die Anzahl benötigter Fahrzeuge durch die Nutzung aperiodischer Fahrpläne gesenkt werden kann. Für das Modell einer einfachen Linie mit zwei Stationen beweisen sie, dass der Betreiber durch Einsatz aperiodischer Fahrpläne über kurze Zeitintervalle mit weniger Fahrzeugen auskommt, während für ausreichend große Zeiträume periodische Fahrpläne immer „optimal“ entworfen werden können.

In ihrem Paper „Exact formulations and algorithm for the train timetabling problem with dynamic demand“ gehen Barrena et al. (2014) von einer genau bekannten Nachfrage pro Haltestellenpaar und Zeiteinheit aus. Ihr Ziel ist es, die Durchschnittsstartwartezeit der Fahrgäste zu minimieren und die Ergebnisse für beide Fahrplanarten zu vergleichen. Dafür formulieren die Autoren ein lineares Optimierungsproblem, bei dem neben den Abfahrtszeiten auch die Geschwindigkeiten und Verweildauern an den Haltestellen als Variablen zu optimieren sind. Für dieses sehr komplexe, hochdimensionale Problem präsentieren sie außerdem einen

leistungsstarken Branch-and-Cut-Algorithmus, den sie auf reale Nachfragedaten der Madrider Metro anwenden. Bei der Analyse der Wartezeiten des optimierten aperiodischen Fahrplans fällt auf, dass eine Wartezeitersparnis von bis zu 37 % im Vergleich zu periodischen Fahrplänen erzielt werden kann.

Robenek et al. (2016) formulieren für ihr Optimierungsproblem zwei Zielwertfunktionen: Eine Funktion zur Bestimmung der Kosten für den Betreiber und eine Funktion, welche die Kundenzufriedenheit in Abhängigkeit von Fahr- und Wartezeiten sowie der Umsteigehäufigkeit misst. Hierbei wird sichtbar, dass aperiodische Fahrpläne besonders bei hoher Nachfrage eine höhere Kundenzufriedenheit erreichen, da sie flexibler als periodische Fahrpläne sind und geringere Fahrzeugfolgezeiten ermöglichen. Darüber hinaus wählen die Autoren den Ansatz, bei der Optimierung sowohl die Interessen der Betreiber, als auch die der Fahrgäste zu beachten. Dafür werden die Betreiberkosten als Zielwertfunktion gewählt, jedoch für den Kundenzufriedenheitswert eine untere Grenze definiert, welche dann als Randbedingung in das Optimierungsproblem einfließt.

In einer späteren Veröffentlichung (Robenek et al. (2017)) entwerfen die Autoren einen neuen Fahrplantyp, mit dem Ziel, die Regelmäßigkeit der periodischen mit der Flexibilität der aperiodischen Fahrpläne zu verbinden. Für diesen „hybriden“ Fahrplan werden nur 75% der eingesetzten Fahrzeuge eine Periodizitätsbedingung auferlegt. Die übrigen 25% gelten als aperiodische Fahrzeuge, deren Abfahrtszeiten auf die Nachfrageschwankungen im Tagesverlauf angepasst werden können. Bei der Optimierung mit der Kundenzufriedenheit als Zielwertfunktion erzielt dieser hybride Fahrplan ähnlich gute Ergebnisse wie der komplett aperiodische. Er enthält immer wiederkehrende Abfahrtszeiten, die aber in den Hauptverkehrszeiten durch zusätzliche unregelmäßige Abfahrtszeiten ergänzt werden.

3 Modellierung

3.1 Problemformulierung als mathematisches Modell

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, eine Methode zu entwickeln, mit der für eine bestimmte vorgegebene Nachfragesituation wartezeitminimale Fahrpläne erstellt werden können. Dafür wird der von Barrena et al. (2014) präsentierte Ansatz aufgegriffen, ein lineares ganzzahliges Optimierungsproblem zu formulieren. Dieses wird um einige Aspekte erweitert, indem beispielsweise auch die Zielwartezeit der Fahrgäste mit Wunschankunftszeit in die Zielwertfunktion integriert wird. Auch sollen innerhalb des Planungshorizonts mehrere Umläufe eines eingesetzten Fahrzeugs unter Einhaltung der minimalen Umlaufzeit zugelassen werden. Außerdem wird das Modell an alle für die vorliegende Arbeit getroffenen Annahmen angepasst. Hierfür ist es zunächst erforderlich, einige Parameter zu definieren, welche die Linie und die Nachfrage bestimmen.

3.1.1 Rahmenbedingungen des Verkehrsangebots

Betrachtet wird eine Buslinie mit einer festen Menge von n Haltestellen $H = \{H_1, \dots, H_n\}$. Um im Folgenden auf die gesonderte Betrachtung der beiden Richtungen (siehe Kapitel 2.2) verzichten zu können, werden allen doppelt angefahren Haltestellen zwei Nummern zugeordnet, je eine für die Hinrichtung und eine für die Rückrichtung. Wie in Abbildung 3.1 dargestellt, resultiert die Haltestellenmenge $H' = \{H_1, \dots, H_{2n-2}\}$. Mit H_{2n-2} ist also die gleiche Haltestelle wie H_2 gemeint, jedoch nur für den Fall, dass Sie in Rückrichtung angefahren wird. Ein Fahrzeug fährt mit diesen neuen Bezeichnungen also die Haltestellen H_1 bis H_{2n-2} in aufsteigender Reihenfolge an und kehrt schließlich wieder zur Starthaltestelle H_1 zurück.

Zwischen zwei direkt aufeinanderfolgenden Haltestellen wird mit festen, vorgegebenen Fahrzeiten geplant. Für $1 \leq i < 2n - 2$ gibt $t_{i,i+1}^{FZ} \in \mathbb{N}$ die Fahrzeit zwischen H_i und H_{i+1} in Minuten an. $t_{2n-2,1}^{FZ} \in \mathbb{N}$ ist die Fahrzeit für die letzte Teilstrecke des Umlaufs. Außerdem werden feste Wende- und erforderliche Standzeiten an H_1 und H_n definiert:

- $t_1^{WZ}, t_n^{WZ} \in \mathbb{N}$: Wendezeit an H_1 bzw. H_n [min]
- $t_1^{STZ,\min}, t_n^{STZ,\min} \in \mathbb{N}$: Erforderliche Standzeit an H_1 bzw. H_n . [min]

Die erforderlichen Standzeiten richten sich dabei nach gesetzlichen Regelungen zu Fahrerpausen oder betriebsinternen Vorgaben. Auch ein geplanter Puffer zum Ausgleich etwaiger Verspätungen aus vorherigen Fahrten kann in die erforderliche Standzeit integriert werden (vgl. Friedrich (2021a)).

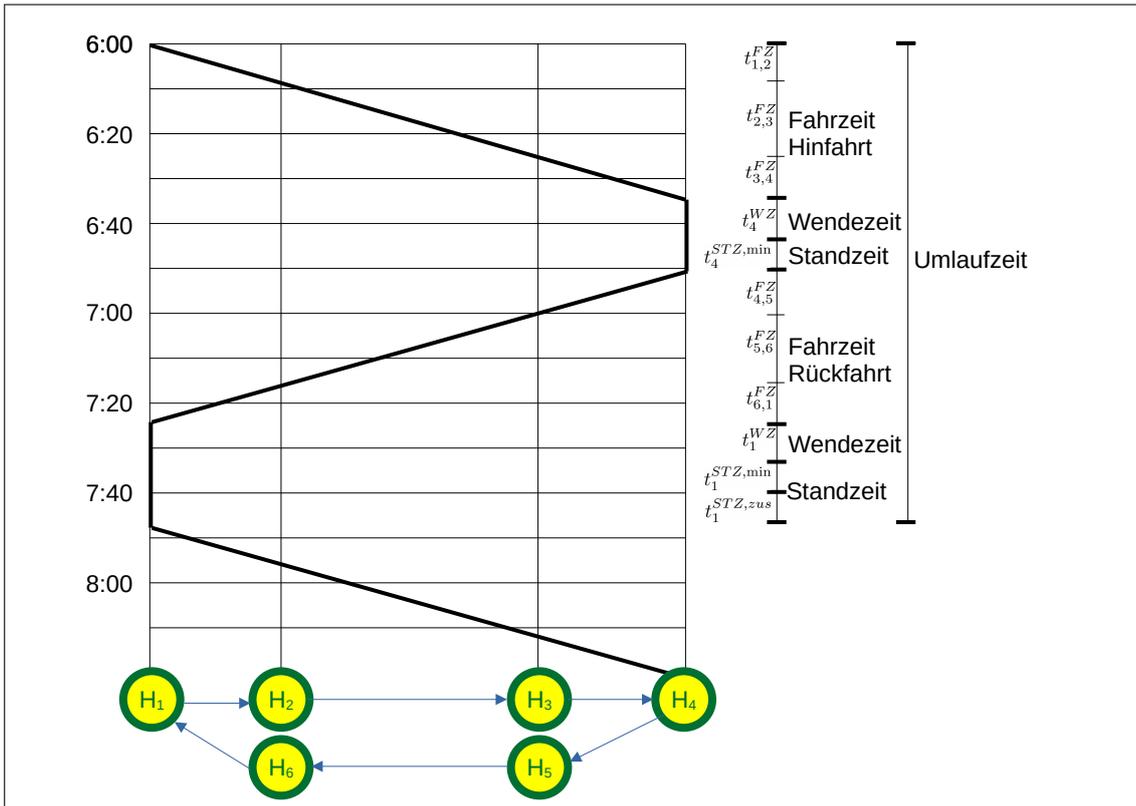


Abbildung 3.1: Umlauf einer ÖV-Linie mit $n = 4$ inklusive Fahrzeitprofil mit alternativer Haltestellenbezeichnung.

Da die Fahrzeiten zwischen den Haltestellen als fest angenommen werden, ergeben sich alle Abfahrtszeiten an den Zwischenhaltestellen direkt aus der Abfahrtszeit an der ersten Haltestelle. Somit liegt der Gestaltungsspielraum beim Fahrplangentwurf darin, die Standzeit an den Randhaltestellen um die Dauer $t^{STZ,zus} \in \mathbb{N}_0$ zu verlängern. Um die Zahl der Variablen hierbei gering zu halten, wird in dieser Arbeit die Einschränkung vorgenommen, dass diese Möglichkeit nur an der Starthaltestelle H_1 besteht, während an Haltestelle H_n immer nur mit der vorgegebenen erforderlichen Standzeit geplant wird, ohne Option auf Verlängerung:

$$t_1^{STZ} = t_1^{STZ,\min} + t_1^{STZ,zus} \quad (3.1)$$

$$t_n^{STZ} = t_n^{STZ,\min} \quad (3.2)$$

Nun gilt für die sogenannte Gesamtfahrzeit, definiert als Zeitdifferenz zwischen Abfahrt an H_1 und der darauffolgenden Ankunft an derselben Haltestelle:

$$t_{Ges}^{FZ} = \sum_{k=1}^{2n-3} t_{k,k+1}^{FZ} + t_n^{WZ} + t_n^{STZ,\min} + t_{2n-2,1}^{FZ} \quad (3.3)$$

Durch Addition der Wendezeit und der erforderlichen Standzeit an H_1 ergibt sich schließlich die minimale Umlaufzeit:

$$t^{U,\min} = t_{Ges}^{FZ} + t_1^{WZ} + t_1^{STZ,\min} \quad (3.4)$$

Neben den Fahr-, Wende- und Standzeiten ist für die Fahrplangestaltung außerdem relevant, dass dem Betreiber der Linie nur eine bestimmte Anzahl von Fahrzeugen mit einer bestimmten Kapazität zur Verfügung steht:

- $n^{Fahrzeuge} \in \mathbb{N}$: Anzahl zur Verfügung stehender Fahrzeuge
- $q^{\max} \in \mathbb{N}$: Kapazität eines Fahrzeugs

Nach Friedrich (2021a) entspricht die Kapazität eines Personenverkehrsmittels der Platzanzahl.

Dementsprechend betrifft die Suche nach wartezeitminimalen Fahrplänen im Kontext dieser Arbeit nicht nur die Planung bestimmter Abfahrtszeiten. Vielmehr wird auch die Einsatzplanung berücksichtigt und jeder Fahrplanfahrt direkt eines der zur Verfügung stehenden Fahrzeuge zugeordnet. Während also Robenek et al. (2016) bei der Optimierung die Betreiberkosten als Zielwertfunktion wählen und den Kundenzufriedenheit nach unten begrenzen, werden in dieser Arbeit die Rollen der beiden Parteien getauscht: Optimiert wird in Bezug auf die Fahrgastwartezeit, welche maßgebend für die Kundenzufriedenheit ist. Die Betreiberkosten sind aber indirekt über die Anzahl der zur Verfügung stehenden Fahrzeuge nach oben begrenzt. Die Anzahl der benötigten Fahrer, die Anzahl der Fahrplanfahrten pro Tag und damit auch die Einsatzkilometer sind von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Fahrzeuge abhängig und somit ebenfalls begrenzt.

3.1.2 Nachfragemodell

Um die Gesamtwartezeit bei einem gegebenen Fahrplan zu untersuchen oder gar einen Fahrplan im Hinblick auf diese Wartezeit zu optimieren, sind Informationen über die Fahrgastnachfrage im Tagesverlauf erforderlich. In dieser Arbeit soll also nicht nur die Nachfrage zur Spitzenstunde in die Fahrplanoptimierung mit einfließen, sondern vielmehr ein dynamisches Nachfragemodell erarbeitet werden, das in der Lage ist, Nachfrageschwankungen im Tagesverlauf und gesammelte Nachfrage zu bestimmten Zeitpunkten zu berücksichtigen.

Planungshorizont

Zunächst wird ein Planungshorizont $T = [0, p]$ des Fahrplans definiert, $p \in \mathbb{N}$ gibt dessen Dauer in Minuten an. Der Planungshorizont kann beispielsweise die Dauer eines Tages haben ($p = 24 \cdot 60 = 1440$), kleinere Zeiträume sind aber auch möglich. Dieser Planungshorizont wird nun diskretisiert in Zeitintervalle der Länge $\delta = 1$ min. Im Folgenden werden Zeitpunkte aus Übersichtsgründen immer schlicht als ganzzahlige Werte angegeben, so steht $t \in \{0, 1, \dots, p\}$ für den Zeitpunkt δt nach Beginn des Planungshorizonts. Für die Ermittlung der Wartezeiten ist später ein Nachfragemodell erforderlich, das die Nachfrage *pro Zeitintervall* $]t - 1, t]$ beziehungsweise $[t, t + 1[$ (je nach Fahrgasttyp) angibt.

Nachfragematrizen mit der Haltestellenmenge H'

Sei $n' := |H'| = 2n - 2$ die Mächtigkeit der in 3.1.1 definierten Haltestellenmenge H' . In den folgenden Abschnitten werden einige Nachfragematrizen der Dimension $n' \times n'$ auf Haltestellenebene definiert. Deren Einträge d_{ij} geben die Anzahl der Fahrgäste bestimmter Fahrgastgruppen und -typen an, die bezogen auf einen bestimmten Zeitraum von einer Haltestelle $H_i \in H'$ zu einer anderen Haltestelle $H_j \in H'$ fahren wollen. Für diese Einträge gelten folgende Bedingungen:

$$D_{ij} = 0 \quad \text{falls } i < n \text{ und } j \in \{1, \dots, i\} \cup \{n + 1, \dots, n'\} \quad (3.5)$$

$$D_{ij} = 0 \quad \text{falls } i \geq n \text{ und } j \in \{2, \dots, i\} \quad (3.6)$$

Grund für diese Einschränkung ist, dass für diese Haltestellenkombinationen mindestens einer der folgenden Fälle zutrifft:

- H_i und H_j repräsentieren die gleiche Haltestelle. In diesem Fall wird keine Ortsveränderung nachgefragt, also muss der Wert 0 sein.
- Zwischen Abfahrt an H_i und Ankunft an H_j findet ein Wendevorgang statt. In diesem Fall kann immer eine der beiden Haltestellen so durch die entsprechende Haltestelle in der Gegenrichtung ersetzt werden, dass eine kürzere Reisezeit entsteht. Diese wird nach Annahme von Fahrgästen immer präferiert.

Beispiel: Sei wie in Abbildung 3.2 dargestellt $i < n - 1$ und $j = n + 1$. Zwischen der Abfahrt an H_i und der Ankunft an H_{n+1} muss ein eingesetztes Fahrzeug an H_n wenden. Ein Fahrgast mit Zielhaltestelle H_{n+1} kann aber schon an Haltestelle H_{n-1} aussteigen, da diese beiden Haltestellen sich nach Kapitel 3.1.1 am gleichen Ort befinden. Somit muss die Verkehrsnachfrage für das Haltestellenpaar H_i, H_{n+1} gleich 0 sein.

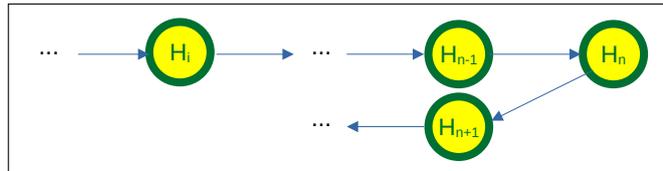


Abbildung 3.2: Einschränkung für die Nachfragematrizen: Die Nachfrage zwischen H_i und H_{n+1} muss 0 sein.

Alle übrigen Einträge der Nachfragematrizen müssen außerdem nichtnegativ sein: $D_{ij} \geq 0$.

Die Gesamtnachfrage des Modells setzt sich aus zwei Nachfrage- beziehungsweise Interessensgruppen zusammen:

Nachfragegruppe Schüler

Die erste Nachfragegruppe besteht aus Schülerinnen und Schülern mit festen Terminen wie Schulanfangs- und Schulendzeiten, aus denen sich Wunschankunfts- und Wunschabfahrtszeiten ableiten lassen. Schüler, die den Bus nutzen, um morgens zur Schule zu fahren, haben eine feste Wunschankunftszeit vor Schulbeginn (Ankunftsnachfrage). Für den Rückweg nach Unterrichtsende haben sie wiederum eine feste Wunschabfahrtszeit (Abfahrtsnachfrage). Konsequenterweise werden zwei Nachfragematrizen pro Zeitintervall für die Schüler definiert:

- $D_t^{AB,S} \in \mathbb{N}_0^{n' \times n'}$: Abfahrtsnachfrage Schüler im Zeitintervall $]t - 1, t]$
- $D_t^{AN,S} \in \mathbb{N}_0^{n' \times n'}$: Ankunftsnachfrage Schüler im Zeitintervall $[t, t + 1[$

Ein Eintrag $(D_t^{AB,S})_{ij}$ der Matrix $D_t^{AB,S}$ gibt die Anzahl der Schüler an, die eine Wunschabfahrtszeit im Zeitintervall $]t - 1, t]$ an Haltestelle H_i haben und zu H_j fahren möchten.

Analog gibt ein Eintrag $(D_t^{AN,S})_{ij}$ der Matrix $D_t^{AN,S}$ die Anzahl der Schüler an, die eine Wunschankunftszeit im Zeitintervall $[t, t + 1[$ an Haltestelle H_j haben und an H_i einsteigen möchten.

Nachfragegruppe Einkaufende

Die Zweite Nachfragegruppe beinhaltet Personen, zusammengefasst als Einkaufende, die keine festen gemeinsamen Wunschabfahrtszeiten haben, sondern zu

zufälligen Zeitpunkten abfahren möchten. Das entspricht der in Kapitel 2.4 erläuterten Kategorie der nicht-planenden Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit. Aufgrund dieser stochastischen Verteilung der Wunschabfahrtszeiten erscheint es paradox, die Nachfrage für kleine Zeitintervalle $]t-1, t]$ der Dauer $\delta = 1$ Minute direkt zu quantifizieren. Für größere Zeiträume ist es jedoch sinnhaft die Anzahl der nachgefragten Fahrten pro Haltestellenpaar anzugeben. Somit werden zunächst Nachfragematrizen für sogenannte Zeitscheiben definiert, das sind beliebig große Zeitintervalle, welche den Planungshorizont abdecken: $]0, z_1],]z_1, z_2], \dots,]z_{k-1}, p]$ mit $z_2 < \dots < z_{k-1} \in T \cap \mathbb{N}$.

- $D_{]z_{i-1}, z_i]}^{AB,E} \in \mathbb{N}_0^{n \times n}$: Abfahrtsnachfrage Einkaufende in der Zeitscheibe $]z_{i-1}, z_i]$

Auch der ganze Planungshorizont kann als Zeitscheibe gewählt werden ($k = 1$). Um Nachfrageschwankungen innerhalb des Planungshorizonts gerecht zu werden, können die Zeitscheiben jedoch eine kürzere Dauer haben. Es gilt die Annahme, dass die entsprechenden Wunschabfahrtszeiten gleichverteilt in den Zeitscheiben liegen.

Da die Formulierung des linearen ganzzahligen Optimierungsproblems in Kapitel 3.3 allerdings auf einer Diskretisierung durch Zeitintervalle der Länge $\delta = 1$ Minute basiert, ist es unumgänglich, die Nachfragematrizen auf diese anzupassen. Jedoch sollte sich hierbei der Erwartungswert der Startwartezeit optimalerweise nicht ändern. Im Folgenden wird gezeigt, wie das umgesetzt werden kann: Wie in Kapitel 2.4 dargestellt, ergibt sich der Erwartungswert der Startwartezeit bei nicht planenden Fahrgästen aus der halben Fahrzeugfolgezeit. Betrachtet werden nun zwei aufeinanderfolgende Abfahrtszeiten $\pi_1^{AB} < \pi_2^{AB} \in T \cap \mathbb{N}$ an einer Haltestelle mit dem zeitlichen Abstand $\Delta_\pi := \pi_2^{AB} - \pi_1^{AB}$. Bei $n_E \in \mathbb{N}$ Einkaufenden, mit zufälliger Wunschabfahrtszeit in $]\pi_1^{AB}, \pi_2^{AB}]$ ergibt sich somit nach Gleichung 2.4 für den Erwartungswert der Gesamtstartwartezeit:

$$\mathbb{E} \left(t_{Ges}^{SZ} \right) = n_E \cdot \frac{\Delta_\pi}{2} \cdot \delta \quad (3.7)$$

Der Zeitraum $]\pi_1^{AB}, \pi_2^{AB}]$ besteht aus Δ_π Zeitintervallen der Länge $\delta = 1$ Minute. Nun werden die n_E Einkaufenden gleichmäßig auf alle diese Δ_π Zeitintervalle verteilt, sodass jedem Zeitintervall einer Nachfrage von n_E / Δ_π Einkaufenden zugeordnet ist. Zu beachten ist, dass hierbei nicht-ganzzahlige Werte entstehen können. Einkaufende, mit Wunschabfahrtszeit in $]\pi_2^{AB} - 1, \pi_2^{AB}]$ haben eine durchschnittliche Startwartezeit von einer halben Minute, wenn man davon ausgeht, dass ihre Wunschabfahrtszeiten innerhalb dieses Zeitintervalls wieder gleichverteilt sind. Entsprechendes gilt auch für die anderen Zeitintervalle und für den

Erwartungswert der Gesamtstartwartezeit gilt somit :

$$\mathbb{E} \left(t_{Ges}^{SZ} \right) = \frac{n_E}{\Delta_\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta + \frac{n_E}{\Delta_\pi} \cdot \frac{3}{2} \cdot \delta + \dots + \frac{n_E}{\Delta_\pi} \cdot \left(\Delta_\pi - \frac{1}{2} \right) \cdot \delta \quad (3.8)$$

$$= \frac{n_E}{\Delta_\pi} \cdot \delta \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta_\pi} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (3.9)$$

$$= \frac{n_E}{\Delta_\pi} \cdot \delta \cdot \left(\sum_{i=1}^{\Delta_\pi} i - \sum_{i=1}^{\Delta_\pi} \frac{1}{2} \right) \quad (3.10)$$

$$= \frac{n_E}{\Delta_\pi} \cdot \delta \cdot \left(\frac{\Delta_\pi (\Delta_\pi + 1)}{2} - \frac{\Delta_\pi}{2} \right) \quad (3.11)$$

$$= n_E \cdot \frac{\Delta_\pi}{2} \cdot \delta \quad (3.12)$$

In Gleichung 3.11 wurde hierbei die Gaußsche Summenformel angewandt. Gleichungen 3.8 - 3.12 beweisen, dass die gegebene Nachfrage einer Zeitscheibe $]z_{i-1}, z_i]$ an die Diskretisierung angepasst werden kann, ohne dass sich der Erwartungswert der Startwartezeit ändert. Somit kann jede Zeitscheibe $]z_{i-1}, z_i]$ in $z_{i-1} - z_i$ Intervalle der Form $]t - 1, t] \subset]z_{i-1}, z_i]$ und Dauer $\delta = 1$ Minute zerteilt werden, deren zugehörige Nachfragematrizen wie folgt berechnet werden:

$$D_t^{AB,E} = \frac{1}{z_i - z_{i-1}} \cdot D_{]z_{i-1}, z_i]}^{AB,E} \quad \forall t \in]z_{i-1}, z_i] \cap \mathbb{N} \quad (3.13)$$

Zu beachten ist, dass hierbei nicht-ganzzahlige Einträge resultieren können, weshalb im Folgenden alle Matrizen als Elemente von $\mathbb{Q}_0^{+n' \times n'}$ angesehen werden.

Schließlich können die Nachfragematrizen der beiden Nachfragegruppen summiert werden um die Gesamtnachfrage anzugeben:

- $D_t^{AB} = D_t^{AB,S} + D_t^{AB,E}$: Gesamtabfahrtsnachfrage im Zeitintervall $]t - 1, t]$
- $D_t^{AN} = D_t^{AN,S}$: Gesamtankunftsnachfrage im Zeitintervall $[t, t + 1[$

3.1.3 Reduktion des Modells auf eine Haltestelle

Entscheidende Kenngröße für die Fahrgäste zur Bewertung eines ÖV-Angebots ist eigentlich die Reisezeit, welche sich aus der Summe der in Tabelle 2.2 genannten Komponenten zusammensetzt. Davon wird die Fahrzeit als konstant angenommen, Umsteigegeh- und Umsteigewartezeiten fallen in dem verwendeten Modell mit nur einer Linie weg, und Zu- und Abgangszeiten sind nicht durch den Fahrplan beeinflussbar. Somit bleibt von den gelisteten Komponenten nur die Startwartezeit als optimierbare Kenngröße übrig. Diese Tatsache motiviert auch

die Suche nach wartezeitminimalen Fahrplänen. Bei Fahrgästen mit Wunschankunftszeit am Ziel fällt die Startwartezeit weg, wird aber dafür durch die Zielwartezeit ersetzt, welche in dieser Arbeit auch berücksichtigt wird. Start- und Zielwartezeiten, die zunächst gemessen und später optimiert werden sollen, hängen zum einen von den Wunschabfahrtszeiten und -ankunftszeiten, und zum anderen von den tatsächlichen Abfahrts- und Ankunftszeiten des Fahrplans ab. Diese Aussage lässt sich sogar noch spezifizieren: Im Folgenden wird gezeigt, dass sich alle Wartezeiten an sämtlichen Haltestellen der Linie über die Abfahrtszeiten an der Starthaltestelle H_1 bestimmen lassen.

Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit

Zunächst kann festgehalten werden, dass die Startwartezeit der Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit nicht von ihrer Zielhaltestelle abhängt. Werden also die Spalten der Nachfragematrix D_t^{AB} summiert, so resultiert eine $n' \times 1$ -Matrix

$$\hat{D}_t^{AB} \in \mathbb{Q}_0^{+1 \times n'} \quad (3.14)$$

deren Einträge $(\hat{D}_t^{AB})_{i,1}$ angeben, wie viele Fahrgäste an Haltestelle H_i im Zeitintervall $]t-1, t]$ abfahren wollen.

Betrachtet wird nun ein beliebiger Fahrgast mit Wunschabfahrtszeit $t^{WABZ,i} \in T$ an einer beliebigen Haltestelle $H_i \in H$. Seine Startwartezeit ergibt sich aus der Differenz seiner Wunschabfahrtszeit und der nächst späteren fahrplanmäßigen Abfahrtszeit $\pi^{AB,i} \in [t^{WABZ,i}, p]$ an H_i :

$$t^{SZ} = \pi^{AB,i} - t^{WABZ,i} \quad (3.15)$$

Da die Fahrzeit $t_{1,i}^{FZ}$ zwischen der Starthaltestelle H_1 der Linie und H_i fest ist, hängt die Abfahrtszeit $\pi^{AB,i}$ an Haltestelle H_i direkt von der Abfahrtszeit $\pi^{AB,1}$ an H_1 ab. Letztere kann also wie folgt berechnet werden:

$$\pi^{AB,1} = \pi^{AB,i} - t_{1,i}^{FZ} \quad (3.16)$$

Wird die feste Fahrzeit $t_{1,i}^{FZ}$ außerdem von der Wunschabfahrtszeit $t^{WABZ,i}$ an H_i abgezogen, resultiert die Abfahrtszeit $t^{WABZ,1}$, die sich dieser Fahrgast für die Starthaltestelle H_1 wünscht:

$$t^{WABZ,1} := t^{WABZ,i} - t_{1,i}^{FZ} \quad (3.17)$$

Die Differenz aus tatsächlicher und gewünschter Abfahrt aus Gleichung 3.15 ergibt sich nun auch an der Starthaltestelle H_1 :

$$\pi^{AB,1} - t^{WABZ,1} = \pi^{AB,i} - t_{1,i}^{FZ} - (t^{WABZ,i} - t_{1,i}^{FZ}) \quad (3.18)$$

$$= \pi^{AB,i} - t^{WABZ,i} = t^{SZ} \quad (3.19)$$

In Abbildung 3.3 ist für den Fall $i = 3$ veranschaulicht, wie die Startwartezeit durch Übertragung der Nachfrage an der Starthaltestelle wiederzufinden ist. Das be-

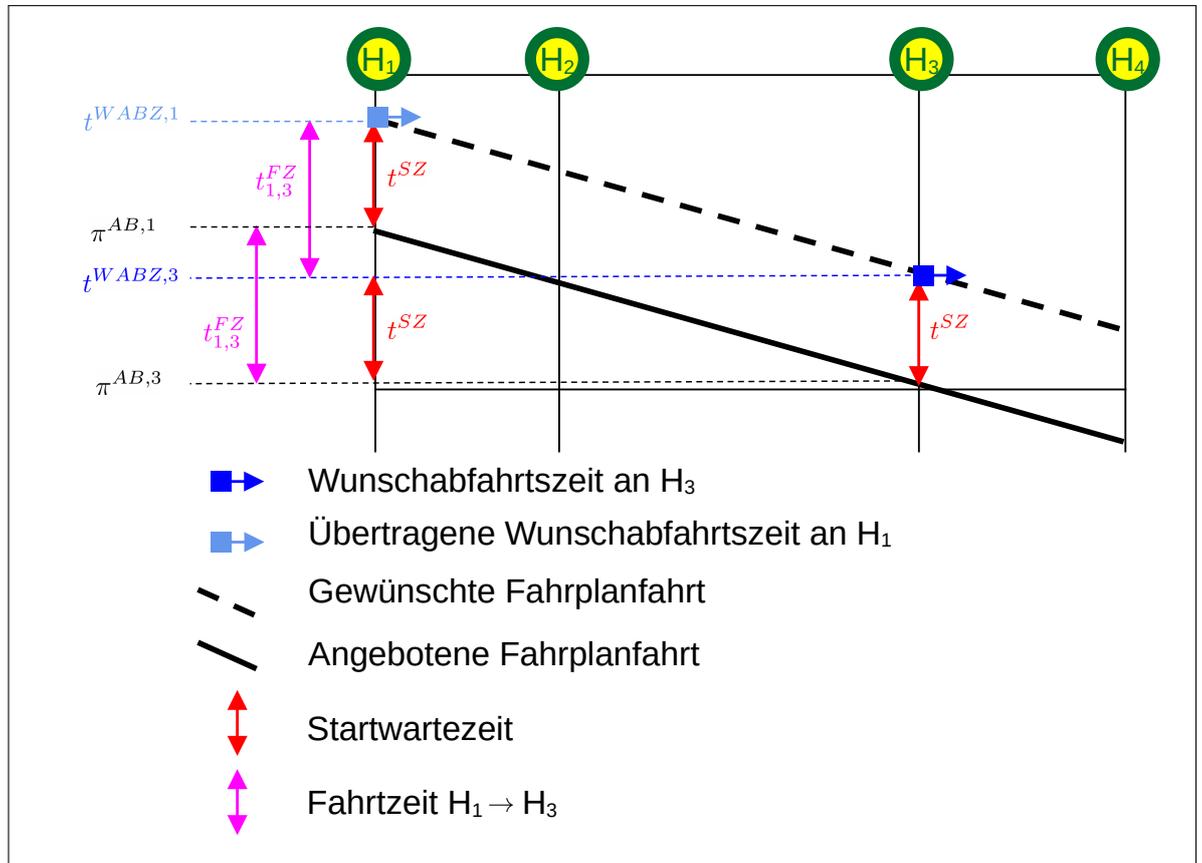


Abbildung 3.3: Bildfahrplanausschnitt: Bestimmung der Startwartezeit an der Starthaltestelle durch Übertragung der Nachfrage.

weist, dass die Startwartezeit der Fahrgäste in diesem Modell auch unabhängig von der Einstiegshaltestelle ist und nur von den Abfahrtszeiten an H_1 abhängen. Daher wird die Abfahrtsnachfrage aller Haltestellen auf die Starthaltestelle H_1 der Linie übertragen. Die Abfahrtsnachfrage im Zeitintervall $]t - 1, t]$ ergibt sich dann zu einem einzelnen Wert $d_t^{AB} \in \mathbb{Q}_0^+$ der sich wie folgt berechnen lässt:

$$d_t^{AB} = \sum_{i=1}^{n'} \left(\hat{D}_{t+t_1, i}^{AB} \right)_{i,1} \quad (3.20)$$

Dieser Wert gibt also an, wieviele Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit an einer beliebigen Haltestelle wünschen, dass ein Fahrzeug im Zeitintervall $]t - 1, t]$ an H_1 abfährt.

Fahrgäste mit Wunschankunftszeit

Da die Zielwartezeit der Fahrgäste mit Wunschankunftszeit am Ziel nicht von ihrer Einstiegshaltestelle abhängt, können die *Zeilen* der Nachfragematrix D_t^{AN} zu einer $1 \times n'$ -Matrix

$$\hat{D}_t^{AN} \in \mathbb{Q}_0^{+1 \times n'} \quad (3.21)$$

summiert werden. Deren Einträge $(\hat{D}_t^{AN})_{1,j}$ geben an, wie viele Fahrgäste an Haltestelle H_j im Zeitintervall $[t, t + 1[$ ankommen wollen.

Fahrgäste mit Wunschankunftszeit $t^{WANZ,j}$, wollen nach Annahme pünktlich an ihrer Zielhaltestelle H_j sein. Daher entscheiden sie sich für das Fahrzeug, das laut Fahrplan zum nächst *früheren* Zeitpunkt $t^{AN,j} \leq t^{WANZ,j}$ an dieser Haltestelle ankommt. Die Zeitdifferenz zwischen tatsächlicher und gewünschter Ankunft am Ziel wird hier als Zielwartezeit gemessen:

$$t^{ZWZ} = t^{WANZ,j} - t^{AN,j} \quad (3.22)$$

Für die resultierende gewünschte und tatsächliche Ankunft an Haltestelle H_1 gilt:

$$t^{WANZ,1} = t^{WANZ,j} + t_{j,1} \quad (3.23)$$

$$t^{AN,1} = t^{AN,j} + t_{j,1} \quad (3.24)$$

Für die Zeitdifferenz an H_1 resultiert:

$$t^{WANZ,1} - t^{AN,1} = t^{WANZ,j} + t_{j,1} - (t^{AN,j} + t_{j,1}) \quad (3.25)$$

$$= t^{WANZ,j} - t^{AN,j} = t^{ZWZ} \quad (3.26)$$

Folglich ist Die Zielwartezeit auch von der Zielhaltestelle unabhängig und hängt nur von den Ankunftszeiten an H_1 ab. Dieser Zusammenhang ist auch in Abbildung 3.4 visualisiert. Die Ankunftszeit eines Fahrzeugs an H_1 hängt wiederum direkt von seiner vorherigen Abfahrtszeiten an H_1 ab:

$$t^{AN,1} = t^{AB,1} + t_{Ges}^{FZ} \quad (3.27)$$

Für die Zielwartezeit ergibt sich:

$$t^{ZWZ} = t^{WANZ,1} - (t^{AB,1} + t_{Ges}^{FZ}) \quad (3.28)$$

Analog zur Abfahrtsnachfrage wird die gesamte Ankunftsfrage auf H_1 übertragen:

$$d_t^{AN} = \sum_{j=1}^{n'} \left(\hat{D}_{t-t_{1,j}^{FZ}}^{AN} \right)_{1,j} \quad (3.29)$$

Dieser Wert gibt an, wie viele Fahrgäste mit Wunschankunftszeit an einer beliebigen Haltestelle wünschen, dass ein Fahrzeug im Zeitintervall $[t, t + 1[$ an H_1 ankommt.

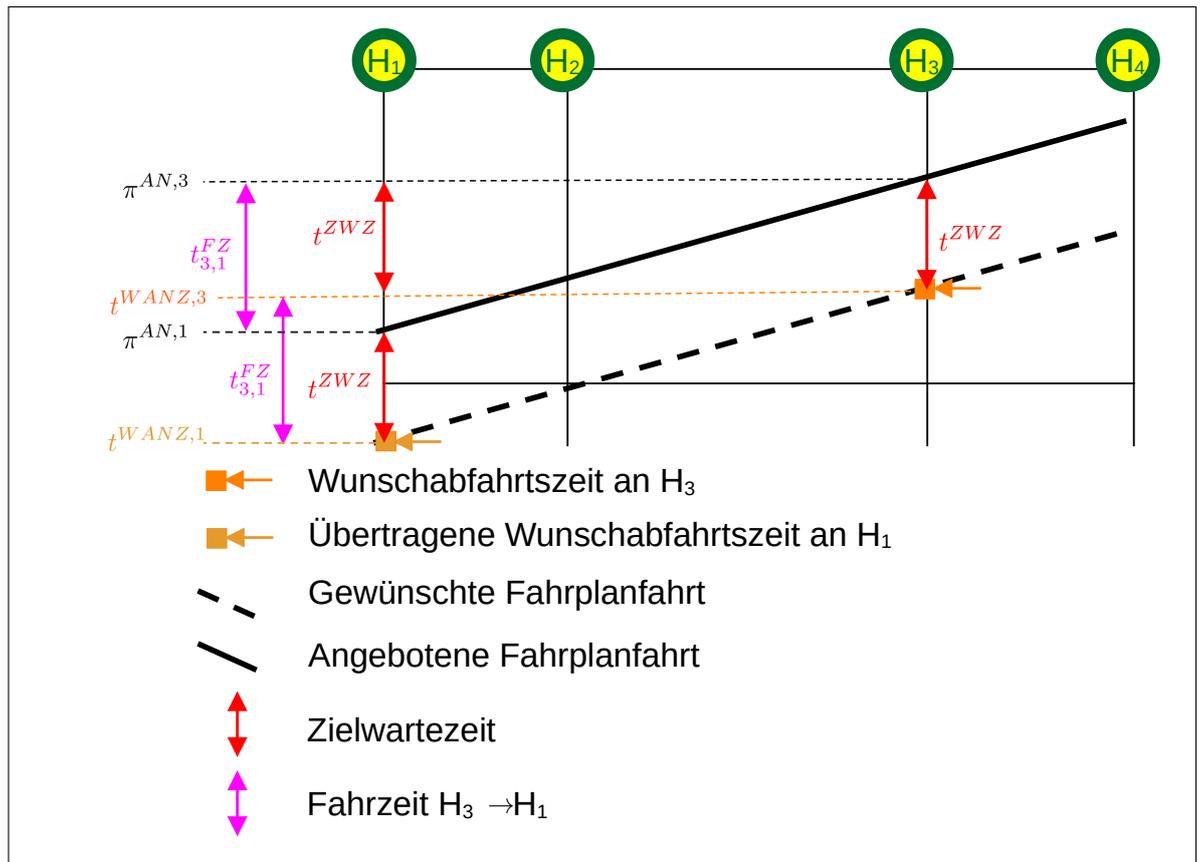


Abbildung 3.4: Bildfahrplanausschnitt: Bestimmung der Zielwartezeit an der Starthaltestelle durch Übertragung der Nachfrage.

In den beiden vorangehenden Abschnitten wurde gezeigt, dass alle Start- und Zielwartezeiten direkt von den Abfahrtszeiten an der Starthaltestelle H_1 der Linie abhängen und die komplette Nachfrage problemlos auf diese Haltestelle übertragen werden kann. Diese Beobachtung kann dann genutzt werden, um das Modell ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf eine Buslinie mit nur einer Haltestelle H_1 zu reduzieren. Im Folgenden wird das Modell der Buslinie und ihrer Nachfrage also lediglich durch die folgenden Werte beschrieben:

- $T =]0, p]$ mit $p \in \mathbb{N}$: Planungshorizont
- $t_{Ges}^{FZ} \in \mathbb{N}$: Gesamtfahrzeit von Starthaltestelle bis Starthaltestelle
- $t_1^{WZ} \in \mathbb{N}$: Wendezeit an Starthaltestelle
- $t_1^{STZ, \min} \in \mathbb{N}_0$: Erforderliche Standzeit an Starthaltestelle
- $t^{U, \min} = t_{Ges}^{FZ} + t_1^{WZ} + t_1^{STZ, \min}$: Minimale Umlaufzeit
- $n^{Fahrzeuge} \in \mathbb{N}$: Anzahl zur Verfügung stehender Fahrzeuge
- $q^{max} \in \mathbb{N}$: Kapazität der zur Verfügung stehenden Fahrzeuge
- $\mathbf{d}^{AB} := (d_1^{AB}, \dots, d_p^{AB}) \in \mathbb{N}_0^p$: Gesamtabfahrtsnachfrage, übertragen auf die Starthaltestelle
- $\mathbf{d}^{AN} := (d_1^{AN}, \dots, d_p^{AN}) \in \mathbb{N}_0^p$: Gesamtankunftsnachfrage, übertragen auf die Starthaltestelle

3.1.4 Fahrpläne

In Kapitel 2.2 wird die Aufgabe von Fahrplänen erläutert und die beiden Kategorien periodisch und aperiodisch charakterisiert. Für die Modellierung ist nun noch eine formale Definition eines Fahrplans erforderlich. Dazu gehören auch mathematische Bedingungen, die von den Fahrplänen der einzelnen Kategorien erfüllt sein müssen.

Ein Fahrplan der Linie wird durch die Abfahrtszeiten der eingesetzten Fahrzeuge an der Starthaltestelle definiert. Für das Modell wird angenommen, dass alle Abfahrts- und Ankunftszeiten immer zur vollen Minute, also zum Zeitpunkt $t \in T \cap \mathbb{N}$ stattfinden und nicht innerhalb eines Zeitintervalls $]t - 1, t[$. Die Abfahrtszeiten aller eingesetzten Fahrzeuge werden mit einer Abfahrtsmatrix

$X \in \{0, 1\}^{n^{Fahrzeuge} \times p}$ angegeben. Für die Einträge der Matrix gilt:

$$X_{i,t} = \begin{cases} 1, & \text{falls Fahrzeug } i \text{ nach Fahrplan zum Zeitpunkt } t \text{ an } H_1 \text{ abfährt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.30)$$

Die Abfahrtsmatrix X gibt also zum einen die Abfahrtszeiten an, ordnet diese aber auch direkt den einzelnen eingesetzten Fahrzeugen zu, wodurch ein Einsatzplan abgeleitet werden kann.

Zusätzlich werden noch die Menge aller Abfahrtszeiten $T_{AB}(X)$ und die Menge aller Ankunftszeiten $T_{AN}(X)$ definiert:

$$T_{AB}(X) := \{1 \leq t \leq p : X_{i,t} = 1 \text{ für mindestens ein } i \in I\} \quad (3.31)$$

$$T_{AN}(X) := \{1 \leq t \leq p : X_{i,t-t_{Ges}^{FZ}} = 1 \text{ für mindestens ein } i \in I\} \quad (3.32)$$

Hierbei ist $I := \{1, \dots, n^{Fahrzeuge}\}$.

Periodische Fahrpläne

Wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, haben periodische Fahrpläne eine feste Fahrzeugfolgezeit, genannt Takt h . Damit ein merkbarer Fahrplan entsteht, muss der Takt einem ganzzahligen Bruchteil oder dem Vielfachen von 60 Minuten entsprechen (siehe Bedingung 2.2). Da im Modell die Anzahl der Fahrzeuge gegeben ist, lässt sich mithilfe der minimalen Umlaufzeit außerdem eine untere Schranke für den Takt angeben:

$$h \geq t^{U,\min} / n^{Fahrzeuge} \quad (3.33)$$

Steht der Takt fest, so resultiert die tatsächliche Umlaufzeit t^U durch Multiplikation mit der Anzahl eingesetzter Fahrzeuge:

$$t^U = h \cdot n^{Fahrzeuge} \quad (3.34)$$

Gilt $t^U > t^{U,\min}$, so muss die Differenz dieser beiden Werte als zusätzliche, unproduktive Standzeit in jedem Umlauf eingeplant werden. Da nach der Festlegung des Takts auch die Umlaufzeit und somit alle Standzeiten feststehen, bleibt als einziger Freiheitsgrad des periodischen Fahrplans die erste Abfahrtszeit $\min(T_{AB}(X))$ im Planungshorizont übrig. Um sie später als Variable in das Optimierungsproblem einzubauen, wird diese über den Vektor $e \in \{0, 1\}^h$ defi-

niert. Für dessen Einträge gilt:

$$e_t = \begin{cases} 1 & \text{falls } \min(T_{AB}(X)) = t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\sum_{t=1}^h e_t = 1 \quad (3.36)$$

Beispiel: Betrachtet wird ein Planungszeitraum der genau zu einer vollen Stunde (z.B. um 05:00 Uhr) beginnt und einen Fahrplan mit 60-Minuten Takt. Folglich gibt es immer genau eine Abfahrt pro Stunde (z.B. 05:23 Uhr, 06:23 Uhr, 07:23 Uhr,...). e_t hat genau dann den Wert 1, wenn t dem Wert der zugehörigen Abfahrtsminute entspricht (im Beispiel $t = 23$).

Um die Periodizität zu gewährleisten, muss ein periodischer Fahrplan folgende Bedingungen für alle $i \in I$ erfüllen:

$$X_{i,t} = 0 \quad \forall t \in \{1, \dots, (i-1) \cdot h - 1\} \quad (3.37)$$

$$X_{i,t} = e_{t-i \cdot h} \quad \forall t \in \{(i-1) \cdot h, \dots, i \cdot h - 1\} \quad (3.38)$$

$$X_{i,t} = 0 \quad \forall t \in \{i \cdot h, \dots, t^U - 1\} \quad (3.39)$$

$$X_{i,t} = X_{i,t+t^U} \quad \forall t \in \{1 \cdot h, \dots, p - 2 \cdot t^{U,\min} - 1\} \quad (3.40)$$

Die Bedingungen 3.37 - 3.39 stellen dabei sicher, dass die erste Abfahrt des i -ten Fahrzeug $i \cdot h$ Zeitschritte nach $\min(T_{AB}(X))$ stattfindet. Bedingung 3.40 gewährleistet außerdem, dass auch alle übrigen Abfahrten zum Takt passen.

Aperiodische Fahrpläne

Aperiodische Fahrpläne müssen zwar die Bedingungen 3.37-3.40 nicht erfüllen, aber dennoch die minimale Umlaufzeit berücksichtigen. Für die Einträge der Abfahrtsmatrix muss daher gelten, dass zwei Abfahrten eines Fahrzeugs nicht zu dicht aufeinanderliegen dürfen. Das kann durch folgende Randbedingungen, geltend für alle $t \in \{1, \dots, p - t^{U,\min}\}$ und $i \in I$, gewährleistet werden:

$$X_{i,t} + X_{i,t+j} \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, t^{U,\min} - 1\} \quad (3.41)$$

Bei einem aperiodischen Fahrplan können die tatsächlichen Umlaufzeiten der einzelnen Umläufe variieren. Die Differenzen in den Umlaufzeiten kommen ausschließlich durch zusätzliche Standzeiten an der Starthaltestelle zustande. Zu betonen ist, dass die Erfüllung der Bedingungen 3.41 für alle periodischen Fahrpläne bereits durch die Periodizitätsbedingungen 3.37 - 3.39 gewährleistet ist. 3.41 ist also eine weichere Bedingung und insbesondere ist jeder periodische Fahrplan per Definition auch ein aperiodischer Fahrplan.

3.2 Algorithmen zur Berechnung von Wartezeiten

Ist die Abfahrtsnachfrage in Form des Vektors d^{AB} und ein Fahrplan in Form der Abfahrtszeitenmenge $T_{AB}(X)$ gegeben, so kann mit Algorithmus 1 die Gesamtstartwartezeit aller Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit berechnet werden.

Algorithmus 1 Berechne Gesamtstartwartezeit.

Input: T_{AB}, d^{AB}

$$t_{Ges}^{SZ} \leftarrow \frac{\delta}{2} \sum_{t=1}^{\max(T_{AB})} d_t^{AB}$$

$$\pi^{AB,previous} \leftarrow 0$$

while $T_{AB} \neq \emptyset$ **do**

$$\pi^{AB,next} \leftarrow \min(T_{AB})$$

for $t = \pi^{AB,previous} + 1$ **to** $\pi^{AB,next} - 1$ **do**

$$t_{Ges}^{SZ} \leftarrow \delta \cdot \left(t_{Ges}^{SZ} + \sum_{\hat{t}=\pi^{AB,previous}+1}^t d_{\hat{t}}^{AB} \right)$$

end for

$$T_{AB} \leftarrow T_{AB} \setminus \{\pi^{AB,next}\}$$

$$\pi^{AB,previous} \leftarrow \pi^{AB,next}$$

end while

Output: t_{Ges}^{SZ}

Hinter dem Algorithmus verbirgt sich folgende, in Abbildung 3.5 beispielhaft visualisierte Idee: Betrachtet werden zwei aufeinanderfolgende Abfahrtszeiten $\pi_1, \pi_2 \in T_{AB}(X)$, die am Zeitstrahl markiert sind. Im Zeitraum zwischen den beiden Abfahrten treffen neun Fahrgäste zu ihrer individuellen, rosa eingezeichneten Wunschabfahrtszeit an der Haltestelle ein.

Die Wunschabfahrtszeiten sind hier nicht an die Diskretisierung angepasst, sondern als Werte auf der kontinuierlichen Zeitachse aufzufassen, so wie sie in der Realität auch vorkommen.

Unterhalb des Zeitstrahls sind die neun Startwartezeiten dieser Fahrgäste als grün-rote Pfeile eingezeichnet. Die Länge des roten Anteils eines Pfeils entspricht der Anzahl an Minuten, die der Fahrgast vollständig mit warten verbringt. Diese Anzahl ist auf der rechten Seite der Abbildung für jeden der neun Fahrgäste in roter Schrift angegeben. Die Werte in schwarzer Schrift geben wiederum an, wie viele Fahrgäste jeweils zur vollen Minute auf den Bus warten.

Auffallend ist nun, dass die Summe der roten und der schwarzen Werte jeweils 18 beträgt. Das ist kein Zufall sondern Resultat der Definition dieser Werte. Kernstück von Algorithmus 1 ist die for-Schleife. Hier werden pro Zeitpunkt $t \in T \cap \mathbb{N}$, in

dem kein Fahrzeug abfährt, die Anzahl der auf das nächste Fahrzeug wartenden Fahrgäste aufaddiert. Das entspricht den schwarzen Werten in der Abbildung.

Dementsprechend fehlen zur Gesamtstartwartezeit aber noch die grünen Anteile der Pfeile. Diese haben pro Fahrgast eine Länge von unter einer Minute. Da der Nachfragevektor \mathbf{d}^{AB} aber nur die Anzahl eintreffender Fahrgäste pro Zeitintervall $]t-1, t]$ angibt, stehen dem Algorithmus keine Informationen über die tatsächliche Länge der grünen Anteile pro Fahrgast zur Verfügung. Unter der Annahme von Gleichverteilung der Wunschabfahrtszeiten innerhalb der Zeitintervalle wird pro Fahrgast mit einer durchschnittlichen Länge des grünen Anteils von $\delta/2$ gerechnet. Daher muss für die Gesamtstartwartezeit zu der angesprochenen Summe der schwarzen Werte noch $\delta/2$ multipliziert mit der Gesamtzahl der Fahrgäste addiert werden. Im Algorithmus wird das durch den Startwert von t_{Ges}^{SZ} realisiert. Der Ausgabewert des Algorithmus entspricht der summierten Startwartezeit aller Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit in Minuten.

Algorithmus 2 zum Berechnen der Gesamtzielwartezeit funktioniert analog zu Algorithmus 1. In der for-Schleife werden diesmal pro Zeitpunkt t , in dem kein Fahrzeug *ankommt*, die Anzahl der auf den Beginn ihres Termins (gleichbedeutend mit ihrer Wunschankunftszeit) wartenden Personen aufaddiert. Abbildung 3.6 verdeutlicht, wie die Summe dieser Werte mit der Zielwartezeit zusammenhängt. Der Algorithmus gibt die summierte Zielwartezeit t_{Ges}^{ZWZ} aller Fahrgäste mit Wunschankunftszeit in Minuten aus.

Die Gesamtwartezeit $t_{Ges}^{WAZ}(X)$ des Fahrplans ergibt sich aus der Summe der Gesamtstartwartezeit und der Gesamtzielwartezeit.

$$t_{Ges}^{WAZ}(X) = t_{Ges}^{SZ}(X) + t_{Ges}^{ZWZ}(X) \quad (3.42)$$

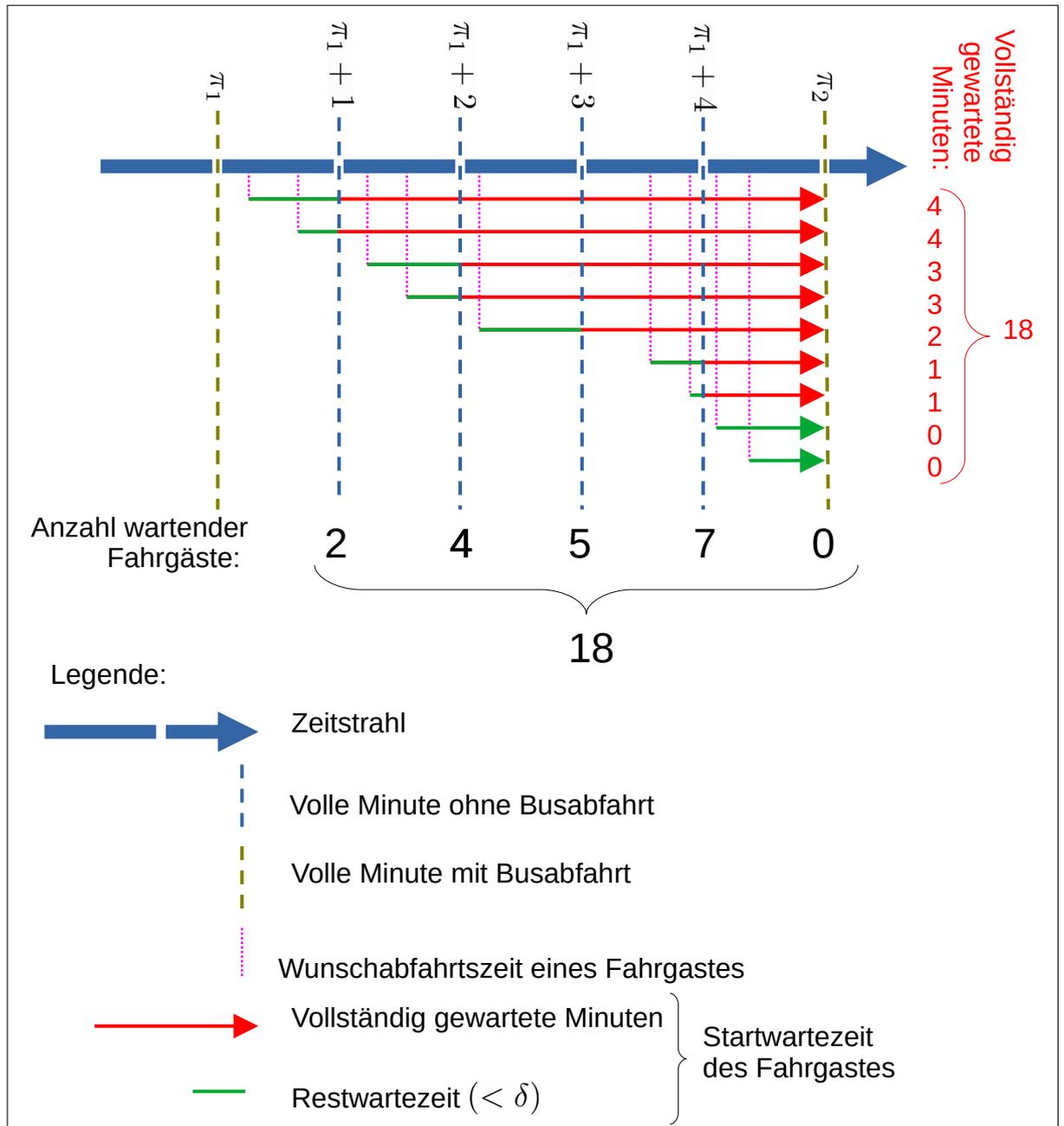


Abbildung 3.5: Messung der Gesamtstartwartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abfahrten.

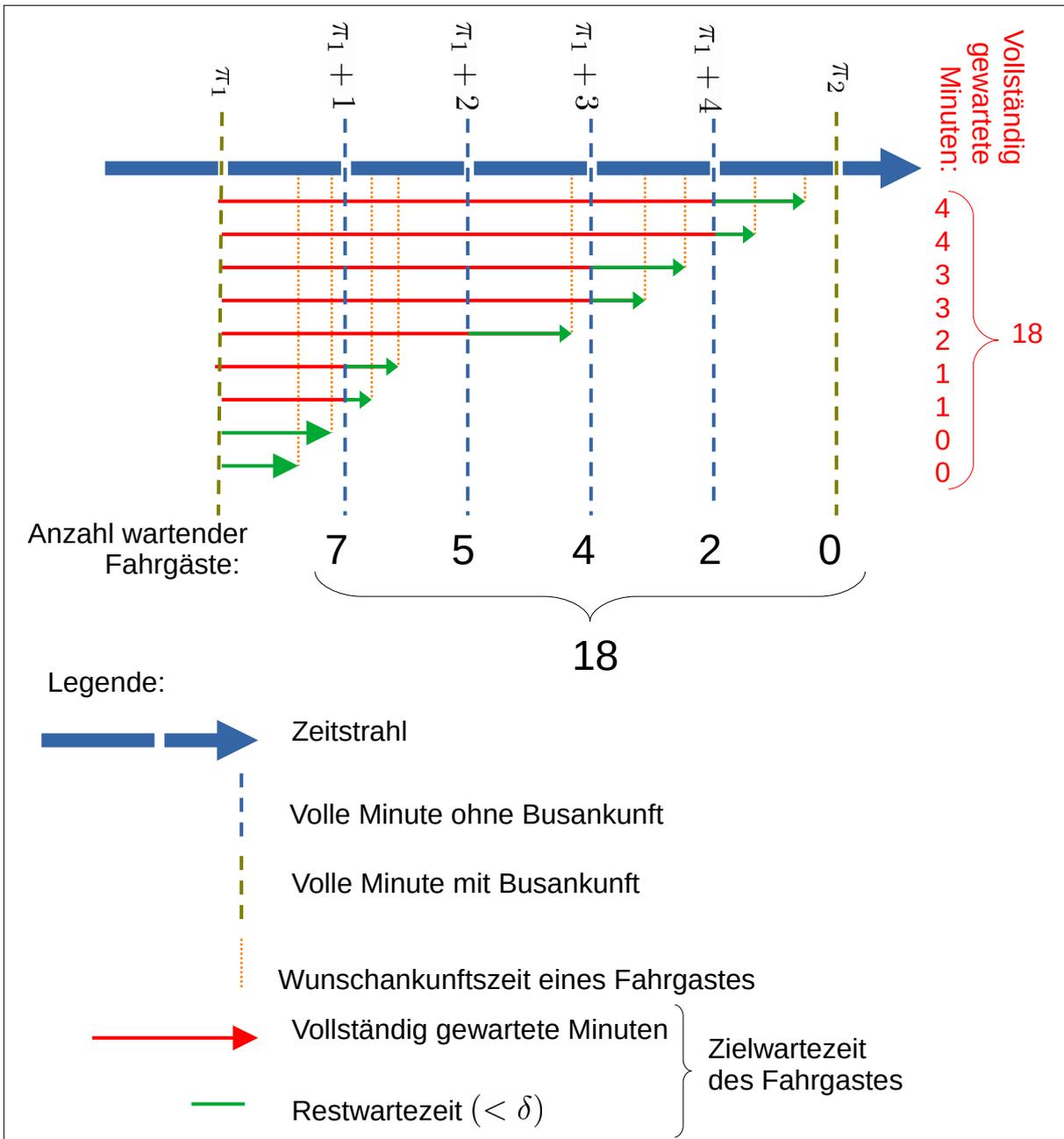


Abbildung 3.6: Messung der Gesamtzielwartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abfahrten.

Algorithmus 2 Berechne Gesamtzielwartezeit.

Input: $p, t_{Ges}^{FZ}, T_{AN}, \mathbf{d}^{AN}$

$$t_{Ges}^{ZWZ} \leftarrow \frac{\delta}{2} \sum_{t=\min(T_{AN})}^p d_t^{AN}$$

$$\pi^{AN,previous} \leftarrow p + 1$$

while $T_{AN} \neq \emptyset$ **do**

$$\pi^{AN,next} \leftarrow \max(T_{AN})$$

for $t = \pi^{AN,previous} - 1$ **to** $\pi^{AN,next} + 1$ **do**

$$t_{Ges}^{ZWZ} \leftarrow \delta \cdot \left(t_{Ges}^{ZWZ} + \sum_{\hat{t}=t}^{\pi^{AN,previous}-1} d_{\hat{t}}^{AN} \right)$$

end for

$$T_{AN} \leftarrow T_{AN} \setminus \{\pi^{AN,next}\}$$

$$\pi^{AN,previous} \leftarrow \pi^{AN,next}$$

end while

Output: t_{Ges}^{ZWZ}

3.3 Algorithmus für optimale Lösungen

In Kapitel 3.2 werden zwei Algorithmen vorgestellt, mit welchen für einen *gegebenen* Fahrplan die Gesamtwartezeit $t_{Ges}^{WAZ}(X)$ bei einer gegebenen Nachfrage berechnet werden kann. Diese dienen nun auch als Ausgangspunkt für die Methode, welche den Fahrplan mit der geringsten Gesamtwartezeit finden soll. Im Mittelpunkt steht hierbei die Abfahrtsmatrix X , deren Einträge für die Optimierung als binäre Entscheidungsvariablen aufgefasst werden. Das ganzzahlige Optimierungsproblem, lautet dann für den aperiodischen Fall:

$$\min_{X \in \{0,1\}^{n_{Fahrzeuge} \times p}} t_{Ges}^{WAZ}(X) \quad (3.43)$$

$$u.d.N. : X_{i,t} + X_{i,t+j} \leq 1 \quad \forall \begin{matrix} i \in I \\ t \in \{1, \dots, p - t^{U, \min}\} \\ j \in \{1, \dots, t^{U, \min} - 1\} \end{matrix} \quad (3.44)$$

Um den Lösungsraum auf periodische Fahrpläne zu beschränken, werden zudem die Einträge von a (siehe Kapitel 3.1.4) als binäre Variablen aufgefasst. Das Optimierungsproblem ergibt sich dann zu:

$$\min_{\substack{X \in \{0,1\}^{n_{Fahrzeuge} \times p} \\ e \in \{0,1\}^{n_{Fahrzeuge}}}} t_{Ges}^{WAZ}(X) \quad (3.45)$$

$$u.d.N. : \sum_{t=1}^h e_t = 1 \quad (3.46)$$

$$X_{i,t} = 0 \quad \forall i \in I, t \in \{1, \dots, (i-1) \cdot h - 1\} \quad (3.47)$$

$$X_{i,t} = e_{t-ih} \quad \forall i \in I, t \in \{(i-1) \cdot h, \dots, i \cdot h - 1\} \quad (3.48)$$

$$X_{i,t} = 0 \quad \forall i \in I, t \in \{i \cdot h, \dots, t^U - 1\} \quad (3.49)$$

$$X_{i,t} = X_{i,t+t^U} \quad \forall i \in I, t \in \{1 \cdot h, \dots, p - 2 \cdot t^{U, \min} - 1\} \quad (3.50)$$

Außerdem werden noch Nebenbedingungen hinzugefügt, die dafür sorgen, dass jede Fahrplanfahrt auch noch innerhalb des Planungshorizonts beendet werden kann.

$$X_{i,t} = 0 \quad \forall t \in \{p - t_{Ges}^{FZ}, \dots, p\} \quad (3.51)$$

Für die Suche nach optimalen Lösungen *linearer* ganzzahliger Optimierungsprobleme können die in Kapitel 2.6.3 beschriebenen Branch-and-Bound und Branch-and-Cut Verfahren genutzt werden. Daher wird in dieser Arbeit der Ansatz verfolgt, eine lineare Formulierung für die Zielwertfunktion und alle notwendigen Nebenbedingungen zu finden und die entsprechenden Algorithmen darauf anzuwenden. Wie in Kapitel 3.2 beschrieben, bestimmen die beiden Algorithmen die jeweiligen Wartezeiten durch Summation der pro voller Minute wartenden Fahrgäste. Die Idee ist nun, für jeden Zeitpunkt $t \in T \cap \mathbb{N}$ diese Werte als Variable zu definieren, und in das Optimierungsproblem zu integrieren:

- $f_t \in \mathbb{Q}_0^+$: Anzahl der Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit, die zum Zeitpunkt t auf das nächste Fahrzeug warten
- $g_t \in \mathbb{Q}_0^+$: Anzahl der Fahrgäste mit Wunschankunftszeit, die zum Zeitpunkt t am Ziel auf den Beginn ihres Termins warten.

Die Zielwertfunktion für die Gesamtwarezeit ergibt sich dann aus der folgenden Summe:

$${}^t_{Ges}WAZ = \sum_{t=1}^p \left((f_t + g_t) \cdot \delta + (d_t^{AB} + d_t^{AN}) \cdot \frac{\delta}{2} \right) \quad (3.52)$$

3.3.1 Zusätzliche Nebenbedingungen

Die Anzahl der wartenden Fahrgäste zu einem bestimmten Zeitpunkt t hängt direkt von der Nachfrage und den Abfahrts- und Ankunftszeiten des Fahrplans ab. Um sicherzustellen, dass die Werte von f und g zu den Einträgen sowohl zu den Nachfragevektoren d^{AB} und d^{AN} als auch zu der Abfahrtsmatrix X passen, müssen weitere Nebenbedingungen aufgestellt werden.

Nebenbedingungen für die Variablen f_t

Zum Verständnis der darauffolgenden mathematischen Formulierung der Nebenbedingungen ist es hilfreich, erneut Abbildung 3.5 zu betrachten und folgenden Denkansatz nachzuvollziehen:

Sei t ein Zeitpunkt an dem kein Fahrzeug abfährt, also $X_{i,t} = 0$ für alle Fahrzeuge gilt. Zum Zeitpunkt t warten genau dieselben Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit auf das nächste Fahrzeug, die zum Zeitpunkt $t-1$ auch schon warteten, zuzüglich derer, die ihre Wunschabfahrtszeit im Intervall $]t-1, t]$ haben. Es gilt also mit Startwert $f_0 := 0$:

$$f_t = f_{t-1} + d_t^{AB} \quad \text{falls } X_{i,t} = 0 \quad \forall i \in I, t \in T \cap \mathbb{N}^{\geq 2} \quad (3.53)$$

Falls wiederum ein Fahrzeug zum Zeitpunkt t abfährt, also $X_{i,t} = 1$ gilt, steigt genau diese Gruppe an Fahrgästen in das Fahrzeug ein und die Zahl der wartenden Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit sinkt auf 0. Zusammengefasst gilt also die Nebenbedingung:

$$f_t = \begin{cases} f_{t-1} + d_t^{AB} & \text{falls } X_{i,t} = 0 \quad \forall i \in I \\ 0 & \text{falls } X_{i,t} = 1 \text{ für mindestens ein } i \in I \end{cases} \quad \forall t \in T \cap \mathbb{N}^{\geq 2} \quad (3.54)$$

Um diese Fallunterscheidung zu umgehen wird für die Anzahl der Einsteiger ebenfalls eine Variable definiert:

- $u_t \in \mathbb{Q}_0^+$: Anzahl der Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit, die zum Zeitpunkt t in ein Fahrzeug einsteigen

Die Nebenbedingung 3.54 kann durch die folgende Formulierung ersetzt werden:

$$f_t = f_{t-1} + d_t^{AB} - u_t \quad \forall t \in T \cap \mathbb{N} \quad (3.55)$$

Für die Anzahl der Einsteiger gilt offensichtlich, dass sie nur dann echt positiv sein kann, wenn überhaupt ein Fahrzeug zu diesem Zeitpunkt abfährt. Außerdem kann sie nicht größer sein, als die Zahl derer, die bis zu diesem Zeitpunkt abfahren möchten. Beides zusammen wird durch folgende Nebenbedingung gewährleistet:

$$u_t \leq \sum_{i=1}^{n^{Fahrzeuge}} X_{i,t} \sum_{\hat{t}=1}^t d_{\hat{t}}^{AB} \quad \forall t \in T \cap \mathbb{N} \quad (3.56)$$

Nebenbedingungen für die Variablen g_t

Betrachtet wird für die folgende Überlegung Abbildung 3.6. Sei t ein Zeitpunkt, zu dem kein Fahrzeug an H_1 ankommt und somit $X_{i,t-t_{Ges}^{FZ}} = 0$ für alle Fahrzeuge gilt. Gesucht ist die Anzahl der Fahrgäste mit Wunschankunftszeit, die zum Zeitpunkt t am Ziel auf den Beginn ihres Termins warten. Diese entspricht der Anzahl derer, die auch zum Zeitpunkt $t+1$ auf den Beginn ihres Termins warten, zuzüglich derer, deren Termin im Zeitintervall $[t, t+1[$ beginnt. Kommt ein Bus zum Zeitpunkt t an, so bedeutet dies, dass eben diese Gruppe an Fahrgästen erst aus dem Fahrzeug aussteigen und die Zahl der Wartenden ist 0. Für die Anzahl der Fahrgäste mit Wunschankunftszeit, die zum Zeitpunkt t aussteigen, wird die Variable $v \in \mathbb{Q}_0^p$ definiert und es folgt mit $g_{p+1} := 0$ die Nebenbedingung:

$$g_t = g_{t+1} + d_t^{AB} - v_t \quad \forall t \in T \cap \mathbb{N} \quad (3.57)$$

Analog zu 3.56 ist auch hier die Anzahl der Aussteiger beschränkt:

$$v_t \leq \sum_{i=1}^{n^{Fahrzeuge}} X_{i,t-t_{Ges}^{FZ}} \sum_{\hat{t}=t}^p d_{\hat{t}}^{AN} \quad \forall t \in T \cap \mathbb{N} \quad (3.58)$$

Zusammengefasst ergibt sich also im aperiodischen Fall das lineare Optimie-

auf ein später (beziehungsweise früher) abfahrendes Fahrzeug ausweichen, wodurch sich die Startwartezeit (beziehungsweise Zielwartezeit) verlängern kann. Das wird im bisherigen Modell noch nicht berücksichtigt. Mithilfe der bereits definierten Variablen u_t und v_t ist es aber unkompliziert Nebenbedingungen aufzustellen, welche die Anzahl der Fahrgäste in einem Fahrzeug beschränken:

$$u_t + v_{t+t_{Ges}^{FZ}} \leq q^{max} \quad \forall t \in T \cap \mathbb{N}^{\leq p-t_{Ges}^{FZ}} \quad (3.61)$$

Die Nebenbedingungen 3.61 können dann einfach an das Optimierungsproblem 3.59 bzw. 3.60 angehängt werden, um die Kapazität zu berücksichtigen.

Um solche ganzzahligen linearen Optimierungsprobleme zu lösen, kann beispielsweise die Optimierungssoftware Gurobi Optimization, LLC (2022) genutzt werden. Dieser Solver wendet die in Kapitel 2.6.3 präsentierten Branch&Bound- und Branch&cut-Verfahren sowie Heuristiken an und gibt entweder die optimale, oder eine heuristische Lösung des Optimierungsproblems aus.

4 Analyse

4.1 Getestete Nachfragesituationen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das in Kapitel 3.3 vorgestellte Verfahren auf verschiedene Nachfragesituationen angewandt. Die Nachfrage der beiden Nachfragegruppen ist wie in Kapitel 2.5 beschrieben, sehr unterschiedlich über dem Planungshorizont verteilt. Es ist somit zu erwarten, dass das Größenverhältnis beider Gruppen die Ergebnisse der Optimierung beeinflusst. Aus diesem Grund wurden die Anteile der beiden Nachfragegruppen an der Gesamtnachfrage variiert, während die Gesamtnachfrage selbst mit $n_{Fahrgäste} = 300$ konstant gewählt wurde. Sei $p_S \in [0, 1]$ der Schüleranteil an der Gesamtnachfrage. Konkret wurden für p_S folgende Werte gewählt:

$$p_S \in \{0\%, 10\%, \dots, 90\%, 100\%\} \quad (4.1)$$

Da sich im Nachfragemodell die Gesamtnachfrage ausschließlich aus den Gruppen Schüler und Einkaufende zusammensetzt, gilt demnach:

$$p_E = 1 - p_S \quad (4.2)$$

Die Anzahl der Schüler und Einkaufenden kann dann mit folgender Rechnung bestimmt werden, wobei aufgrund der Wahl der Werte nur ganzzahlige Werte resultieren:

$$n_S = p_S \cdot n_{Fahrgäste} \quad (4.3)$$

$$n_E = p_E \cdot n_{Fahrgäste} \quad (4.4)$$

Die Nachfrage der Schüler wurde dann auf zwei Wunschankunftszeiten in der ersten Hälfte und zwei Wunschabfahrtszeiten in der zweiten Hälfte des Planungszeitraums verteilt:

$$d_t^{AB,S} = \begin{cases} \frac{n_S}{4} & \text{falls } t \in \{540, 590\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.5)$$

$$d_t^{AN,S} = \begin{cases} \frac{n_S}{4} & \text{falls } t \in \{140, 200\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.6)$$

Die Nachfrage der Einkaufenden wurde gleichmäßig wie in Kapitel 3.1.2 mit dem ganzen Planungshorizont als eine Zeitscheibe verteilt:

$$d_t^{AB,E} = \frac{n_E}{p} \quad \forall p \in T \cap \mathbb{N} \quad (4.7)$$

Neben den Anteilen der beiden Gruppen an der Gesamtnachfrage wurde auch die Anzahl der verfügbaren Fahrzeuge variiert: $n^{Fahrzeuge} \in \{1, 2, 3, 4\}$. Die Optimierung wurde dann für alle möglichen Kombinationen von p_S , $n^{Fahrzeuge}$, den beiden Fahrplanarten (aperiodisch, periodisch) und jeweils sowohl mit, als auch ohne Nebenbedingungen für die Kapazität durchgeführt. Die folgenden Eingabeparameter wurden wiederum fest gewählt:

- $t_{Ges}^{FZ} = 30$: Fahrzeit Starthaltestelle - Starthaltestelle in Minuten
- $t_1^{WZ} = 5$: Wendezeit Starthaltestelle in Minuten
- $t_1^{STZ, \min} = 5$: Erforderliche Standzeit Starthaltestelle in Minuten
- $t^{U, \min} = t_{Ges}^{FZ} + t_1^{WZ} + t_1^{STZ, \min} = 40$: Minimale Umlaufzeit in Minuten
- $p = 640$: Dauer Planungshorizont in Minuten

4.2 Ergebnisse

4.2.1 Wartezeiten ohne Nebenbedingungen für die Kapazität

Abbildung 4.1 zeigt die durchschnittliche Wartezeit der Fahrgäste bei optimierten Fahrplänen. Auffallend ist hier zunächst, dass die Wartezeit im periodischen Fall stets größer oder gleich der zugehörigen Wartezeit ohne geforderte Periodizitätsbedingung ist. Das lässt sich aber direkt damit begründen, dass periodische Fahrpläne, wie in Kapitel 3.1.4 beschrieben, eine Teilmenge der aperiodischen Fahrpläne sind und somit die Wartezeiten gar nicht kleiner sein können. Im Umkehrschluss bedeutet das aber auch, dass der periodische Fahrplan im Falle von Wartezeitgleichheit beider Varianten für diese Eingabewerte optimal ist. Hier resultiert bei der Optimierung der Abfahrtszeiten also ein periodischer Fahrplan, obwohl auf die Periodizitätsbedingung verzichtet wurde. Dieses Szenario ist bei einem Schüleranteil von 0 % und zwei bzw. vier zur Verfügung stehenden Fahrzeugen zu beobachten. Bei einer vollständig gleichmäßig verteilten Nachfrage können periodische Fahrpläne also optimal sein. Diese Erkenntnis wirft allerdings auch die Frage auf, warum das für ein bzw. drei eingesetzte Fahrzeuge nicht zutrifft. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Merkbareitsbedingung (Gleichung

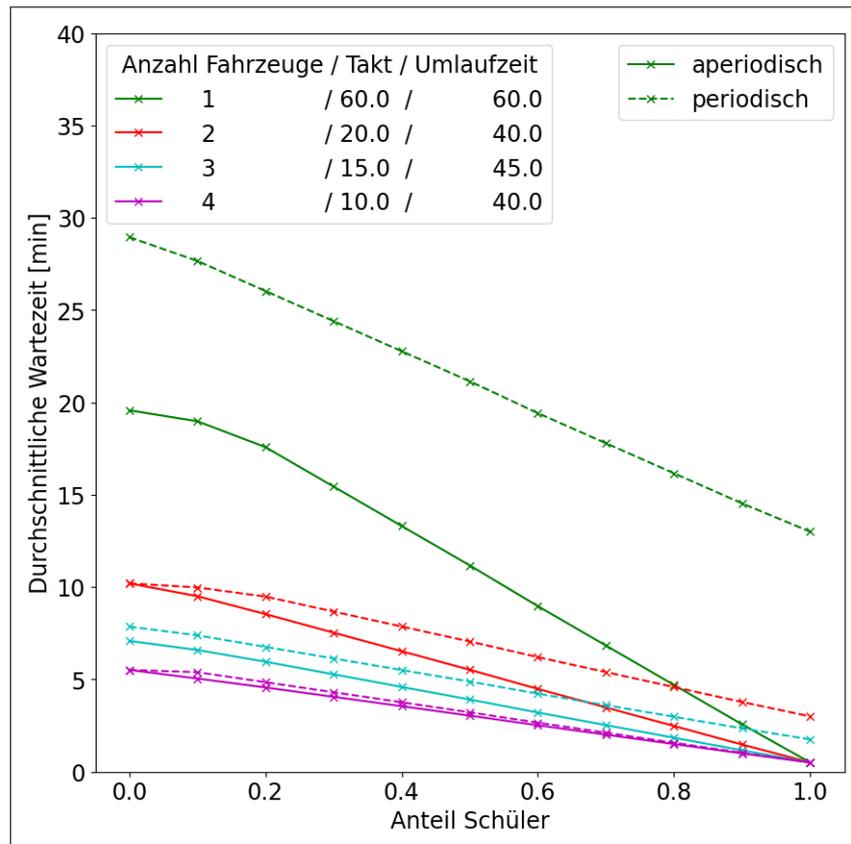
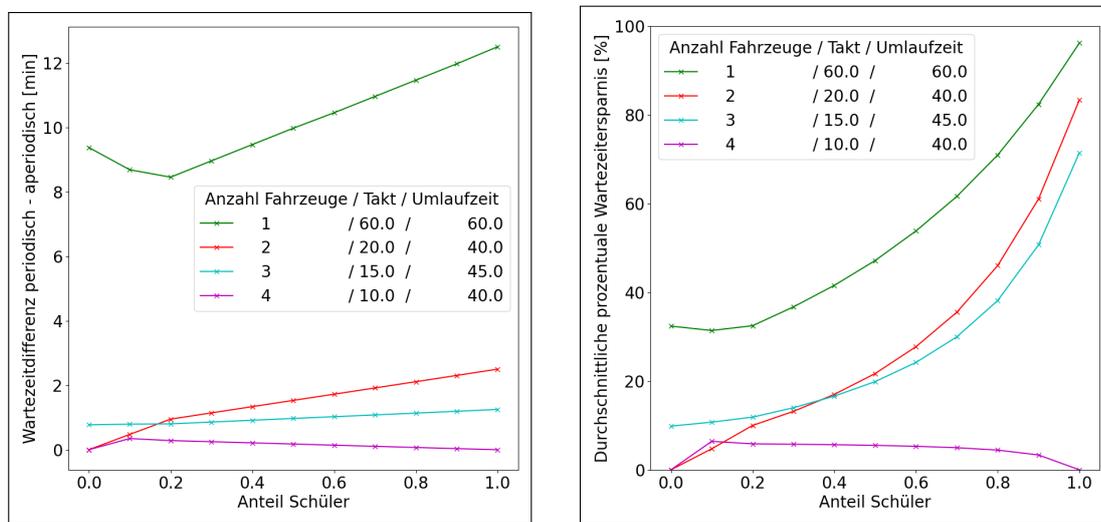


Abbildung 4.1: Durchschnittliche Wartezeiten der Fahrgäste.

2.2) nur bestimmte Takte zulässt. Bei nur einem verfügbaren Fahrzeug und einer minimalen Umlaufdauer von $t^{U,\min} = 40 \text{ min}$ muss ein 60-Minuten-Takt gefahren werden. Die Standzeit wird hier also um ganze 20 Minuten verlängert, wodurch sich die großen Differenzen der Wartezeiten für den aperiodischen und periodischen Fall erklären lassen. Wird die Periodizitätsbedingung aufgehoben, so resultiert zwar auch hier ein Fahrplan mit Abfahrtszeiten in konstanten Abständen, dieser gilt aber nicht als periodisch, da sich die stündlichen Abfahrtszeiten unterscheiden. Für drei verfügbare Fahrzeuge gilt ähnliches, hier muss die Umlaufzeit auf 45 Minuten verlängert werden, sodass ein 15 Minuten Takt entsteht. Bei 2 bzw. 4 Fahrzeugen kann dagegen die minimale Umlaufzeit umgesetzt werden, sodass ein merkbarer Fahrplan entsteht.



(a) Absolute Differenz.

(b) Prozentuale Wartezeitersparnis.

Abbildung 4.2: Wartezeitersparnis durch das Zulassen aperiodischer Fahrplänen im Vergleich zu periodischen Fahrplänen

Abbildung 4.2a zeigt die Differenz der durchschnittlichen Wartezeit bei beiden Fahrplanarten und Abbildung 4.2b zeigt die prozentuale Wartezeitersparnis die durch das Zulassen von aperiodischen Fahrplänen im Vergleich zu periodischen Fahrplänen erzielt werden kann. Es ist erkennbar, dass die Wartezeit durch das Zulassen aperiodischer Fahrpläne vor allem für hohe Schüleranteile drastisch gesenkt werden kann, im Extremfall bis zu über 90 %. Allerdings fällt auf, dass bei 4 Fahrzeugen keine wesentliche Wartezeitersparnis erreicht wird, auch nicht für hohe Schüleranteile. Das lässt sich auf den Umstand zurückführen, dass die vier Wunschabfahrts- und Wunschankunftszeiten der Schüler zeitliche Abstände haben, die einem Vielfachen von 10 Minuten entsprechen und somit Optimalität auch mit dem periodischen 10-Minuten-Takt erreicht werden kann. Daher wurde die Optimierung nochmals mit leicht variierten Wunschabfahrts- und Wunschankunftszeiten durchgeführt.

kunftszeiten durchgeführt:

$$d_t^{Ab,S} = \begin{cases} \frac{n_S}{4} & \text{falls } t \in \{540, 595\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.8)$$

$$d_t^{AN,S} = \begin{cases} \frac{n_S}{4} & \text{falls } t \in \{140, 205\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.9)$$

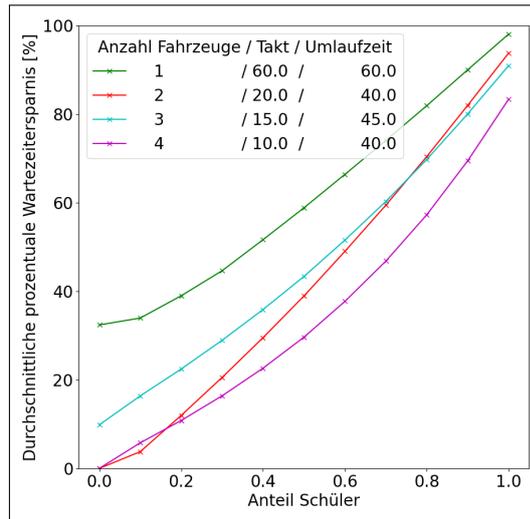


Abbildung 4.3: Durchschnittliche prozentuale Wartezeitersparnis bei variierten Wunschabfahrts- und Wunschankunftszeiten.

Abbildung 4.3 zeigt, dass in diesem Fall auch für 4 Fahrzeuge signifikante Wartezeitersparnisse durch den Einsatz nicht merkbarer Fahrpläne entstehen.

4.2.2 Wartezeiten mit Nebenbedingungen für die Kapazität

Mit einer Kapazität von 60 Fahrgästen pro Fahrzeug und sonst gleichen Eingabewerten wurde das Verfahren erneut durchgeführt. Abbildungen 4.4 bis 4.5b zeigen die Ergebnisse, wenn die Zahl der Fahrgäste in einem Fahrzeug entsprechend begrenzt wird und ein Teil der Fahrgäste folglich auf ein anderes Fahrzeug ausweichen muss. Besonders bei hohen Schüleranteilen steigt hier die Wartezeit der Fahrgäste bei periodischen Fahrplänen stark an, während aperiodische Fahrpläne ab einer bestimmten Anzahl von Fahrzeugen auf die Kapazitätsengpässe reagieren können und kaum verlängerte Wartezeiten entstehen.

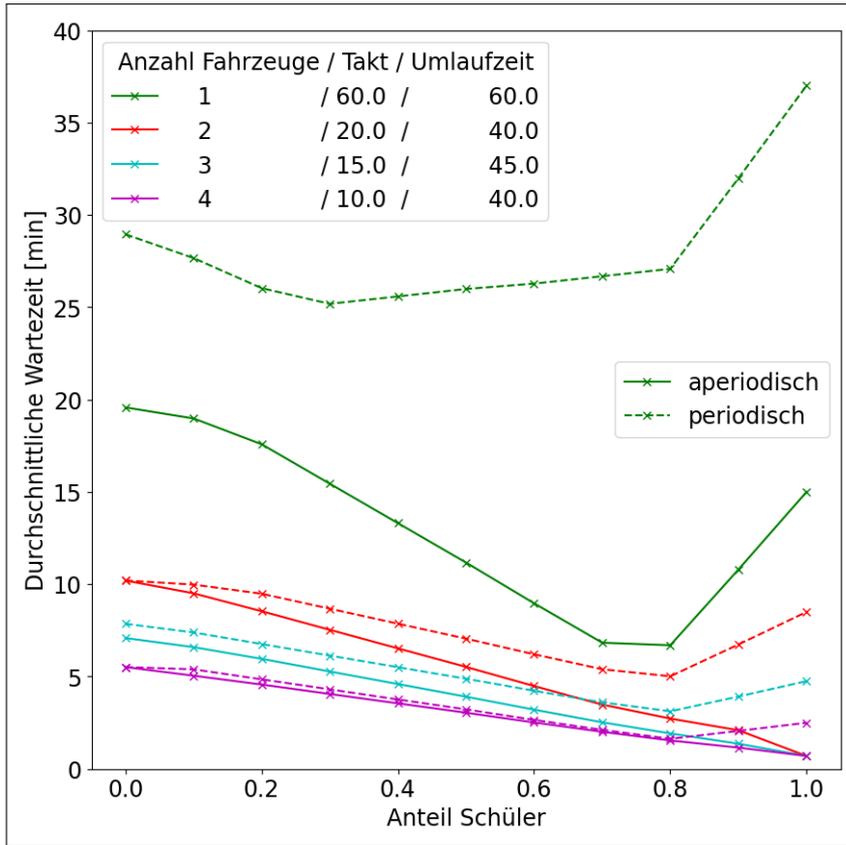
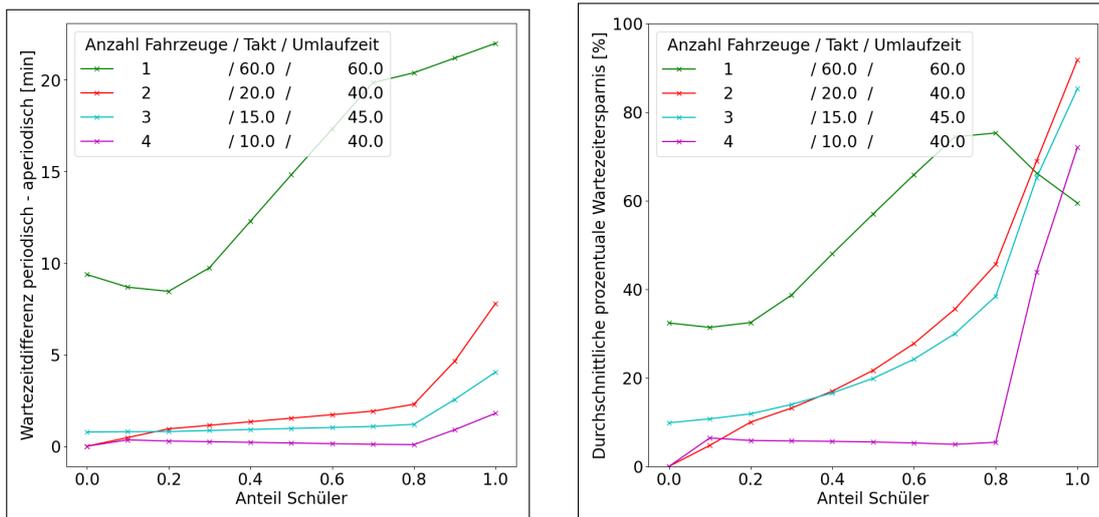


Abbildung 4.4: Durchschnittliche Wartezeiten der Fahrgäste mit Nebenbedingungen für die Kapazität.



(a) Absolute Differenz.

(b) Prozentuale Wartezeitersparnis.

Abbildung 4.5: Wartezeitersparnis durch das Zulassen aperiodischer Fahrplänen im Vergleich zu periodischen Fahrplänen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Wartezeit der Fahrgäste für aperiodische und periodische Fahrpläne untersucht und verglichen. Unterschiedliche Fahrgasttypen wurden definiert und die jeweiligen Komponenten der Gesamtwartezeit analysiert. Mit geeigneten Annahmen konnte für das Modell einer einfachen ÖV-Linie gezeigt werden, dass alle Wartezeiten nur von den Abfahrtszeiten an der Starthaltestelle abhängen und das Modell somit auf eine Linie mit genau einer Haltestelle reduziert werden kann. Zwei Algorithmen zur Bestimmung der beiden relevanten Komponenten der Gesamtwartezeit wurden in der Arbeit angegeben. Schließlich wurde ein linear ganzzahliges Optimierungsproblem mit passenden Nebenbedingungen für beide Fahrplanarten formuliert, dessen Lösung zu wartezeitminimalen Fahrplänen führt. Mithilfe einer auf Branch&Bound- und Branch&Cut-Verfahren basierenden Optimierungssoftware konnten für verschiedene Nachfragesituationen optimale Fahrpläne der jeweiligen Fahrplanart gefunden werden.

Bei der Analyse der Ergebnisse stellte sich heraus, dass die resultierende Gesamtwartezeit eines optimalen aperiodischen Fahrplans immer kleiner oder gleich ist wie bei einem periodischen Fahrplan. Besonders bei einer sehr ungleichmäßig verteilten, aber bekannten Nachfrage können Wartezeiten durch das Zulassen aperiodischer Fahrpläne deutlich gesenkt werden. Jedoch kann der Preis für hohe Merkbarekeit, die nur periodische Fahrpläne gewährleisten, auch für kontinuierlich verteilte Nachfrage hoch sein: Falls die minimal mögliche Umlaufzeit der Linie nicht zu einem merkbaren Takt passt, müssen zusätzliche unproduktive Standzeiten in Kauf genommen werden, wodurch sich auch die Wartezeiten automatisch verlängern. Falls die angestrebte Umlaufzeit hingegen in einem optimalen periodischen Fahrplan realisiert werden kann, so ist dieser bei einer komplett gleichverteilten Nachfrage auch optimal. Liegt zu einzelnen Zeitpunkten hingegen eine verstärkte Nachfrage vor, so schneiden periodische Fahrpläne nur dann gut ab, wenn die zeitlichen Abstände dieser Zeitpunkte Vielfache des Taktes sind.

Besonders deutlich werden die Unterschiede, wenn die Nachfrage an bestimmten Zeitpunkten die Kapazität eines einzelnen Fahrzeugs überschreitet. In diesem Fall muss ein Teil der Fahrgäste auf ein früheres oder späteres Fahrzeug ausweichen, was bei periodischen Fahrplänen deutlich höhere Wartezeiten verursacht als bei den flexibleren aperiodischen Fahrplänen.

Der Ausbau des Modells zu einem Netz von mehreren Linien ist ein mögliches Ziel für weiterführende Arbeiten. Somit könnten neben den Start- und Zielwartezeiten auch Umsteigewartezeiten berücksichtigt werden. Eine weitere Fragestellung könnte lauten, welche Auswirkungen auf Wartezeiten und Merkbarkeit zu erwarten sind, wenn nur ein Teil der Fahrzeuge einer Periodizitätsbedingung unterliegen, während die anderen Fahrzeuge als aperiodisch planbare Verstärkerfahrzeuge eingesetzt werden können. Die Zielwertfunktion des Optimierungsproblems, die sich in dieser Arbeit aus der Gesamtwartezeit ergibt, könnte außerdem durch einen Term für die Betreiberkosten ergänzt werden.

Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole

δ Dauer eines Zeitintervalls der Diskretisierung (1 Minute).

\mathbb{E} Erwartungswert.

π^{AB} Abfahrtszeit.

π^{AN} Ankunftszeit.

A Parametermatrix zur Beschreibung der Nebenbedingungen eines MILP.

D Nachfragematrix (auf Haltestellenebene).

E Fahrgastgruppe Einkaufende.

H Haltestellenmenge mit einfacher Nummerierung.

H' Haltestellenmenge mit doppelter Nummerierung der Zwischenhaltestellen.

H_i i -te Haltestelle einer Linie.

I Indexmenge für die eingesetzten Fahrzeuge.

P Zulässiger Bereich eines MILP.

S Fahrgastgruppe Schüler.

T Planungshorizont.

$T_{AB}(X)$ Menge aller Abfahrtszeiten an der Starthaltestelle bei einem Fahrplan mit der Abfahrtsmatrix X .

$T_{AN}(X)$ Menge aller Ankunftszeiten an der Starthaltestelle bei einem Fahrplan mit der Abfahrtsmatrix X .

X Abfahrtsmatrix eines Fahrplans.

f Anzahl der wartenden Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit an der Einstiegshaltestelle.

g Anzahl der wartenden Fahrgäste mit Wunschankunftszeit an der Zielhaltestelle.

h Takt [min].

- n Anzahl der Haltestellen einer Linie mit einfacher Nummerierung.
- n' Anzahl der Haltestellen einer Linie mit doppelter Nummerierung der Zwischenhaltestellen.
- $n^{Fahrzeuge}$ Anzahl verfügbarer Fahrzeuge.
- n_E Anzahl der Einkaufenden.
- n_S Anzahl der Schüler.
- n_c Anzahl reelwertiger Variablen eines MILP.
- n_d Anzahl ganzzahliger Variablen eines MILP.
- p Dauer des Planungshorizonts [min].
- p_E Anteil der Einkaufenden an der Gesamtnachfrage.
- p_S Anteil der Schüler an der Gesamtnachfrage.
- q^{max} Kapazität eines Fahrzeugs (Platzanzahl).
- t^{FZ} Fahrzeit als Komponente der Reisezeit [min].
- t_{Ges}^{FZ} Gesamtfahrzeit innerhalb eines Umlaufs [min].
- t_{ij}^{FZ} Fahrzeit zwischen H_i und H_j inklusive Haltestellenaufenthaltszeiten [min].
- t^{RZ} Reisezeit [min].
- t^{STZ} Standzeit [min].
- $t^{STZ,min}$ Minimal erforderliche Standzeit [min].
- $t^{STZ,zus}$ Zusätzliche, unproduktive Standzeit [min].
- t^{SZ} Startwartezeit [min].
- t^U Umlaufzeit [min].
- t^{UGZ} Umsteigegezeit [min].
- t^{UWZ} Umsteigewartezeit [min].
- t^{WABZ} Wunschabfahrtszeit.
- t^{WANZ} Wunschankunftszeit.
- t^{WZ} Wendezeit [min].

t^{ZWZ} Zielwartezeit [min].

t^{ZZ} Zugangszeit [min].

u Anzahl der einsteigenden Fahrgäste mit Wunschabfahrtszeit an der Einstiegs-
haltestelle.

v Anzahl der aussteigenden Fahrgäste mit Wunschankunftszeit an der Zielhalte-
stelle.

z Zielfunktionswert eines Optimierungsproblems.

z^* Zielfunktionswert einer optimalen Lösung eines Optimierungsproblems.

b Parametervektor zur Beschreibung der Nebenbedingungen eines MILP.

c Parametervektor einer linearen Zielwertfunktion eines MILP.

\mathbf{d}^{AB} Vektor, dessen Einträge die gesamte Abfahrtsnachfrage pro Zeitintervall an-
geben.

\mathbf{d}^{AN} Vektor, dessen Einträge die gesamte Ankunfts nachfrage pro Zeitintervall an-
geben.

e Binärwertiger Vektor für die erste Abfahrtszeit im Planungshorizont bei periodi-
schen Fahrplänen.

LB Untere Schranke (lower bound) des Zielfunktionswerts eines Optimierungs-
problems.

LP Lineares Optimierungsproblem (linear program).

MILP Gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (Mixed integer line-
ar program).

MIP Gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem (Mixed integer program).

ÖV Öffentlicher Verkehr.

u.d.N. unter den Nebenbedingungen.

UB Obere Schranke (upper bound) des Zielfunktionswerts eines Optimierungs-
problems.

x Variablenvektor eines MILP.

x* Optimale Lösung eines Optimierungsproblems.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Umlauf einer ÖV-Linie mit Fahrzeitprofil.	4
2.2	Einfluss des Taktes auf die Merkbarkeit.	6
2.3	Unterteilung der unterschiedlichen Fahrgasttypen.	10
2.4	Zulässiger Bereich eines Beispiel-MILPs und seiner LP-Relaxation.	13
2.5	Zulässiger Bereich der beiden Unterprobleme und ihrer LP-Relaxationen.	15
2.6	Suchbaum des Branch&Bound Verfahrens für ein Beispiel-MILP.	16
2.7	Trennende Schnittebene zwischen zulässigem Bereich einer Beispiel-MILPs der optimalen Lösung seiner LP-Relaxation.	17
3.1	Umlauf einer ÖV-Linie mit alternativer Haltestellenbezeichnung.	22
3.2	Einschränkung für die Nachfragematrizen.	25
3.3	Bildfahrplanausschnitt: Bestimmung der Startwartezeit an der Starthaltestelle durch Übertragung der Nachfrage.	29
3.4	Bildfahrplanausschnitt: Bestimmung der Zielwartezeit an der Starthaltestelle durch Übertragung der Nachfrage.	31
3.5	Messung der Gesamtstartwartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abfahrten.	37
3.6	Messung der Gesamtzielwartezeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abfahrten.	38
4.1	Durchschnittliche Wartezeiten der Fahrgäste.	47
4.2	Wartezeitersparnis durch das Zulassen aperiodischer Fahrplänen im Vergleich zu periodischen Fahrplänen ohne Nebenbedingungen für die Kapazität	48
4.3	Durchschnittliche prozentuale Wartezeitersparnis bei variierten Wunschabfahrts- und Wunschankunftszeiten ohne Nebenbedingungen für die Kapazität.	49

4.4	Durchschnittliche Wartezeiten der Fahrgäste mit Nebenbedingungen für die Kapazität.	50
4.5	Wartezeitersparnis durch das Zulassen aperiodischer Fahrplänen im Vergleich zu periodischen Fahrplänen mit Nebenbedingungen für die Kapazität.	50

Tabellenverzeichnis

2.1	Zielkriterien und Kenngrößen für Betreiber nach Hartl (2020). . . .	7
2.2	Komponenten der Reisezeit nach Friedrich (2021b).	8

Algorithmenverzeichnis

1	Algorithmus zur Berechnung der Gesamtstartwartezeit.	35
2	Algorithmus zur Berechnung der Gesamtzielwartezeit.	39

Literaturverzeichnis

- Barrena, Eva/ Canca, David/ Coelho, Leandro C./ Laporte, Gilbert, “Exact formulations and algorithm for the train timetabling problem with dynamic demand”, in *Computers & Operations Research* [2014], Bd. 44:S. 66–74, ISSN 0305-0548, doi:<https://doi.org/10.1016/j.cor.2013.11.003>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030505481300316X>.
- Borndörfer, Ralf/ Liebchen, Christian, *When Periodic Timetables are Suboptimal*, Techn. Ber. 07-29, ZIB, Takustr. 7, 14195 Berlin [2007].
- Esfeh, Mohammad Ansari/ Wirasinghe, S. C./ Saidi, Saeid/ Kattan, Lina, “Waiting time and headway modelling for urban transit systems – a critical review and proposed approach”, in *Transport Reviews* [2021], Bd. 41(2):S. 141–163, doi:10.1080/01441647.2020.1806942, URL <https://doi.org/10.1080/01441647.2020.1806942>.
- Friedrich, Markus, *Vorlesungsskript Verkehrsplanung und Verkehrsmodelle*, Institut für Straßen- und Verkehrswesen, Universität Stuttgart [2021a].
- Friedrich, Markus, *Vorlesungsskript Verkehrsplanung und Verkehrstechnik*, Institut für Straßen- und Verkehrswesen, Universität Stuttgart [2021b].
- Gomory, Ralph, *Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs and An Algorithm for the Mixed Integer Problem*, S. 77–103, ISBN 978-3-540-68274-5 [2010], doi:10.1007/978-3-540-68279-0_4.
- Gurobi Optimization, LLC, “Gurobi Optimizer Reference Manual”, [2022], URL <https://www.gurobi.com>.
- Hartl, Maximilian, *Integrierte ÖV-Planung - Entwurf, Vergleich und Bewertung von planerischen und algorithmischen Lösungsverfahren* -, Institut für Straßen- und Verkehrswesen, Universität Stuttgart, Stuttgart, ISBN 978—3-9-82-11-3 [2020], URL https://elib.uni-stuttgart.de/bitstream/11682/10833/3/2020_Diss_Hartl.pdf.
- Johnson, Daniel/ Shires, Jeremy/ Nash, Chris/ Tyler, Jonathan, “Forecasting and appraising the impact of a regular interval timetable”, in *Transport Policy* [2006], Bd. 13(5):S. 349–366, ISSN 0967-070X, doi:<https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2006.01.001>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967070X06000035>.

- Kallrath, J., *Gemischt-ganzzahlige Optimierung: Modellierung in der Praxis: Mit Fallstudien aus Chemie, Energiewirtschaft, Papierindustrie, Metallgewerbe, Produktion und Logistik*, Springer Fachmedien Wiesbaden [2012], ISBN 9783658006907, URL <https://books.google.de/books?id=zcmMzgv15x0C>.
- Kirchhoff, Peter, *Ermittlung und Beeinflussung der Verkehrsnachfrage*, S. 71–96, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, ISBN 978-3-322-84800-0 [2002], doi:10.1007/978-3-322-84800-0_4, URL https://doi.org/10.1007/978-3-322-84800-0_4.
- Land, A. H./ Doig, A. G., “An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems”, in *Econometrica* [1960], Bd. 28(3):S. 497–520, ISSN 00129682, 14680262, URL <http://www.jstor.org/stable/1910129>.
- Nowak, Wolfgang, *Vorlesungsskript Statistik und Optimierung für SimTech*, Institut für Wasser- und Umweltsystemmodellierung, Universität Stuttgart [2015].
- Nuzzolo, Agostino/ Crisalli, Umberto/ Rosati, Luca, “A schedule-based assignment model with explicit capacity constraints for congested transit networks”, in *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* [2012], Bd. 20(1):S. 16–33, ISSN 0968-090X, doi:<https://doi.org/10.1016/j.trc.2011.02.007>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X11000337>, special issue on Optimization in Public Transport+ISTT2011.
- Padberg, M./ Rinaldi, G., “Optimization of a 532-city symmetric traveling salesman problem by branch and cut”, in *Operations Research Letters* [1987], Bd. 6(1):S. 1–7, ISSN 0167-6377, doi:[https://doi.org/10.1016/0167-6377\(87\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0167-6377(87)90002-2), URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167637787900022>.
- Robenek, Tomáš/ Maknoon, Yousef/ Azadeh, Shadi Sharif/ Chen, Jianghang/ Bierlaire, Michel, “Passenger centric train timetabling problem”, in *Transportation Research Part B: Methodological* [2016], Bd. 89:S. 107–126, ISSN 0191-2615, doi:<https://doi.org/10.1016/j.trb.2016.04.003>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261515300771>.
- Robenek, Tomáš/ Sharif Azadeh, Shadi/ Maknoon, Yousef/ Bierlaire, Michel, “Hybrid cyclicity: Combining the benefits of cyclic and non-cyclic timetables”, in *Transportation Research Part C: Emerging Technologies* [2017], Bd. 75:S. 228–253, ISSN 0968-090X, doi:<https://doi.org/10.1016/j.trc.2016.12.015>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X16302698>.

Wardman, Mark/ Shires, Jeremy/ Lythgoe, William/ Tyler, Jonathan, "Consumer benefits and demand impacts of regular train timetables", in *International Journal of Transport Management* [2004], Bd. 2(1):S. 39–49, ISSN 1471-4051, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijtm.2004.04.002>, URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1471405104000229>, rail Policy and Planning in Europe.